Via Afrika Wiskunde

Graad 11 Studiegids

M. Pillay, L.J. Schalekamp, L.Bruce, G. du Toit, C.R. Smith,
L.M. Botsane, J. Bouman, A.D. Abbott

Via Afrika

Our Teachers. Our Future.

R. Cloete

Study Guide

Studiegids

Via Afrika Wiskunde

Graad 11

Via Afrika

Our Teachers. Our Future.

ISBN: 978-1-41546-345-1

Inhoud

Inleiding tot Via Afrika Wiskunde Graad 11 Studiegids

Woohoo! Jy het dit gehaal! As jy lees wat hier staan, beteken dit dat jy Graad 10 deurgekom het, en nou in Graad 11 is. Maar hoekom vir jou iets vertel wat jy reeds weet ...

Dit beteken ook dat jou onderwyser briljant genoeg was om die *Via Afika Wiskunde Graad 11 Leerderboek* te kies. Hierdie studiegids bevat opsommings van elke hoofstuk, en moet saam met die Leerderboek gebruik word. Dit bevat ook baie ekstra vrae om jou te help om die leermateriaal te bemeester.

Wiskunde – nie vir toeskouers nie

Jy sal niks leer as jy nie aktief betrokke raak by die leermateriaal nie. Doen die wiskunde, voel die wiskunde, en verstaan en gebruik dan die wiskunde.

Verstaan die beginsels

- **Luister in klastyd** Hierdie studiegids is uitstekend, maar dit is nie genoeg nie. Luister na jou onderwyser in die klas omdat jy 'n unieke of maklike manier om iets te doen, kan leer.
- **Bestudeer die notasie, grondig.** Vir die verkeerde gebruik van notasie sal in toetse en eksamens punte afgetrek word. Gee aandag aan notasie in ons uitgewerkte voorbeelde.
- **Oefen, Oefen, Oefen, en Oefen nog eens.** Jy moet soveel moontlik oefen. Hoe meer jy oefen, hoe beter voorbereid en meer selfversekerd sal jy vir die eksamens voel. Hierdie gids bevat baie ekstra oefengeleenthede.
- **Volhard.** Ons kan nie almal Einsteins wees nie, en selfs oom Albert het gesukkel om sommige van die uiters gevorderde wiskunde te leer wat hy nodig gehad het om sy teorieë te formuleer. As jy dit nie dadelik verstaan nie, werk daaraan en oefen met soveel probleme in hierdie studiegids moontlik. Jy sal vind dat onderwerpe wat jou aanvanklik dronkgeslaan het, skielik vir jou verstaanbaar word.
- **Toon die regte ingesteldheid.** Jy kan dit doen!

Die VMI van Wiskunde

VERMOë behels wat jy in staat is om te doen.

MOTIVERING bepaal wat jy doen.

INGESTELDHEID bepaal hoe goed jy dit doen.

"Gee my 'n staanplek, en ek sal die aarde verskuif!" *Archimedes*

Eksponente en Wortelvorms

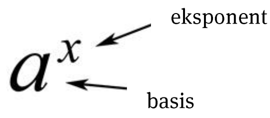
Oorsig

Hoofstuk 1 Bladsy 2 Eksponente en wortelvorms	Eenheid 1 Bladsy 3 Rasionale eksponente	• Eksponente en wortelvorms • Eksponensiële vergelykings
	Eenheid 2 Bladsy 5 Wortelvorms	• Soorte wortelvorms • Vermenigvuldig en deel wortelvorms • Vergelykings met wortelvorms

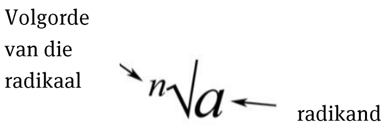
In hierdie hoofstuk hersien ons die eksponentwette en eksponensiële vergelykings. Nadat ons dit gedek het, sal ons rasionale eksponente en wortelvorms behandel. Jy sal ook leer hoe om eksponensiële vergelykings op te los, wortelvorms te vereenvoudig en om vergelykings wat wortelvorms bevat, op te los.

Rasionale eksponente

1.1 Eksponente en wortelvorms



- Die eksponent van 'n getal sê vir jou hoeveel keer die getal met homself vermenigvuldig word.
- 'n Wortelvorm is 'n getal wat nie verder vereenvoudig kan word om die wortel te verwyder nie. Dit is irrassionale getalle.
- Ons neem altyd aan dat 'n wortel sonder 'n getal daarvoor 'n vierkantswortel is.
- Die vierkantswortel van 'n getal a kan as $\sqrt{a}$ geskryf word, of in eksponensiële vorm as $a^{1/2}$.
- Die derdemagswortel van 'n getal b kan as $\sqrt[3]{b}$ geskryf word, of in eksponensiële vorm as $b^{1/3}$.
- Die nde wortel van 'n getal c kan as $\sqrt[n]{c}$ geskryf word, of in eksponensiële vorm as $c^{1/n}$.
- In die uitdrukking $\sqrt[3]{64}$ is die 3 volgorde van die radikaal en 64 is die radikand. Ons lees $\sqrt[3]{64}$ as die derdemagswortel van 64.
- In die eksponensiële vorm is die basis van die uitdrukking die radikand.
- Onthou, as ons die vergelyking $\sqrt[n]{a} = a^{1/n}$ het en ons verhef albei kante tot die mag k, het ons $(\sqrt[n]{a})^k = (a^{1/n})^k$, wat tot $\sqrt[n]{a}^k = a^{k/n}$ vereenvoudig kan word



Voorbeeld 1

Vereenvoudig die volgende vergelykings sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

1 $27^{1/3} = (3^3)^{1/3}$

$= 3$

2 $(3\tfrac{3}{8})^{-2/3} = (\tfrac{27}{8})^{-2/3}$

$= (\tfrac{8}{27})^{2/3}$

$= [(\tfrac{2}{3})^3]^{2/3}$

$= (\tfrac{2}{3})^2 \quad = \tfrac{4}{9}$

3 $(4a^4b^{16}c^8)^{1/2} = (2^2a^4b^{16}c^8)^{1/2}$

$= 2a^2b^8c^4$

1.2 Eksponensiële vergelykings

- Sommige eksponensiële vergelykings het net een oplossing, terwyl ander meer het.
- Onthou, dit kan veralgemeen word as:
  As $x^{a/b} = c$, waar c 'n konstante is, dan
  - as a onewe is, is daar net een oplossing.
  - as a ewe is, is daar twee oplossings. Een sal positief wees, en een sal negatief wees.

Voorbeeld 2

Vereenvoudig die volgende vergelykings sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

1 $x^{1/2} = 3$

$[x^{1/2}]^2 = 3^2$

$\therefore x = 3$

2 $x^{2/5} = 4$

$[x^{2/5}]^{5/2} = \pm [4]^{5/2}$

$x = \pm (2^2)^{5/2}$

$\therefore x = \pm 32$

2.1 Soorte wortelvorms

- 'n Wortelvorm is 'n irassionale getal en dit bevat 'n wortelvorm.
- Ons kan die volgende wette gebruik om ons te help om uitdrukkings te vereenvoudig:
  - Produkreël: $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{a.b}$
  - Kwosiëntreël: $\sqrt[m]{a} / \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$

  Let op dat hierdie wette net op vermenigvuldiging en deling van toepassing is, en $a > 0$ en $b > 0$.
- Wanneer ons wortelvorms vereenvoudig, skryf ons die getalle as die produk van volkome vierkante en ander getalle, bv. g. $\sqrt{8} = \sqrt{(4.2)} = 2\sqrt{2}$

Voorbeeld 3

Vereenvoudig die volgende sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

1 $2\sqrt{3} + 9\sqrt{3} - 16\sqrt{3} + 6\sqrt{3} = \sqrt{3}$

2 $2\sqrt{3} + 9\sqrt{2} - 16\sqrt{3} + 6\sqrt{2} = 15\sqrt{2} - 14\sqrt{3}$

3 $\sqrt{75} - \sqrt{18} = \sqrt{25.3} - \sqrt{9.2}$

$= \sqrt{25}\sqrt{3} - \sqrt{9}\sqrt{2}$

$= 5\sqrt{3} - 3\sqrt{2}$

4 $(\sqrt{48} + \sqrt{27})/\sqrt{75} = (\sqrt{16.3} + \sqrt{9.3})/\sqrt{25.3}$

$= (\sqrt{16}\sqrt{3} + \sqrt{9}\sqrt{3})/\sqrt{25}\sqrt{3}$

$= (4\sqrt{3} + 3\sqrt{3})/5\sqrt{3}$

$= 7\sqrt{3}/5\sqrt{3}$

$= \frac{7}{5}$

2.2 Vermenigvuldig en deel wortelvorms

- Om wortelvorms te vermenigvuldig of te deel, moet ons dikwels van die distributiewe eienskap gebruik maak:
  $a(b + c) = ab + bc$
- Sommige probleme moet deur rasionalisering opgelos word. Rasionalisering is die proses waarvolgens ons 'n noemer/teller met 'n irrasionale getal omskakel tot 'n rasionale getal. Ons doen dit deur die uitdrukking te vermenigvuldig met die wortelvorm gedeel deur homself.

Voorbeeld 4

Vereenvoudig die volgende sonder om ‘n sakrekenaar te gebruik:

1 $5(2\sqrt{3} + 9) = 10\sqrt{3} + 45$

2 $(\sqrt{5} - 6)(2\sqrt{6} + 8) = 2\sqrt{30} - 12\sqrt{6} + 8\sqrt{5} - 48$

3 $(\sqrt{5} + 3)(\sqrt{5} - 3) = 5 - 9 = -4$

2.3 Vergelykings met wortelvorms

- Om vergelykings wat wortelvorms bevat, te vereenvoudig, moet ons eers die wortelvorm verwyder.
- Om die wortelvorm te verwyder, moet ons albei kante tot die orde van die radikaal verhef, bv. as ons 'n vergelyking met 'n vierkantswortel moet oplos, moet ons eers albei kante kwadreer.
- Toets jou oplossing!

Voorbeeld 5

Los die volgende op sonder om ‘n sakrekenaar te gebruik:

1 $\sqrt{x + 5} = 8$

$x + 5 = 64$

$\therefore x = 59$

2 $\sqrt{x+2} - x = 0$

$\sqrt{x+2} = x$

$x + 2 = x^2$

$x^2 - x - 2 = 0$

$(x + 1)(x - 2) = 0$

$\therefore x = -1$ or $x = 2$

Toets: $x = -1$

LK = $\sqrt{((-1)+2)} - (-1)$

$= 1 + 1 = 2$

$\neq$ RK (ongeldige oplossing)

Toets: $x = 2$

LK = $\sqrt{(2+2)} - 2$

$= 2 - 2 = 0$

= RK

Dus, $x = \mathbf{2}$ is enigste geldige oplossing.

Opsomming van die eksponentwette

Eksponentwette	
Vermenigvuldig magte – voeg eksponente by	$a^x \times a^y = a^{x+y}$
Deel magte – trek eksponente af	$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
Verhef mag tot 'n mag – vermenigvuldig eksponente	$(a^x)^y = a^{xy}$
Negatiewe eksponente kan geskryf word as die omgekeerde van die mag met 'n positiewe eksponent	$a^{-x} = \frac{1}{a^x}$
Om die n de wortel te vind, verdeel die eksponent deur n	$\sqrt[n]{a^x} = a^{x/n}$
Enigiets tot die mag nul is 1 (behalwe 0)	$a^0 = 1$

ONTHOU! Die basisse moet dieselfde wees!

Vrae

Vraag 1

Vereenvoudig die volgende sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

1.1 $3^{4/3}$

1.2 $\sqrt[3]{3^3}$

1.3 $(3^{-3/2})^{2/5}$

1.4 $4^{3/2} - 36^{1/2} + 216^{1/3}$

1.5 $(0{,}0625)^{-3/4}.(0{,}125)^{-4/3}$

1.6 $\sqrt[6]{(64n^{12})^2}$

1.7 $(49m^7n^9)^{6/4}$

1.8 $(81x^3y^7)^{-2/3}.3(x^{-4}y^{-3})^{-2/3}$

1.9 $[\sqrt{169x^3y^4}/(7\mathrm{x}^{-3})^{-4}]^{-1}$

1.10 $(4^{2n+3})^{1/7}.(7^{2n-3})^{1/7}/(12^{2n-3})^{1/7}.(5^{2n+3})^{1/7}$

Vraag 2

Vereenvoudig die volgende sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

2.1 $y^{2/3} = 9$

2.2 $k^{1/5} = 3$

2.3 $m^{-4/3} = 0{,}0625$

2.4 $2^{y+3} + 2^y = 9$

2.5 $7^{-k} - 7^{-k-2} = 48$

2.6 $2^{x/2} + 2^{x/2+1} = 24$

2.7 $(7x + 14)\big(2x - 0{,}0875\big) = 0$

2.8 $3^{2x} - 2.3^x = 3$

2.9 $16^x + 8.4^x = 48$

2.10 $7^{-x+3} + 7^{2+x} = 392$

Vraag 3

Vereenvoudig die volgende sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

3.1 $\sqrt[3]{5} + 9\sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{5}$

3.2 $12\sqrt{9} - 3\sqrt{45} + 6\sqrt{72}$

3.3 $(\sqrt{50} - \sqrt{72})/\sqrt{98}$

3.4 $\sqrt[5]{\sqrt{a^{100}}} + \sqrt[3]{\sqrt{a^{15}}} - \sqrt[7]{\sqrt{a^{8}}}$

3.5 $\sqrt{18} - \sqrt{80} + \sqrt{98}$

3.6 $\sqrt{\sqrt{64} - \sqrt{48}}/\sqrt{50}$

Vraag 4

Vereenvoudig die volgende sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

4.1 $3\sqrt{5} \times 2\sqrt{2}$

4.2 $-4\sqrt{3} \times (-5\sqrt{2})$

4.3 $4\sqrt{5}\,(-2\sqrt{2} + 3)$

4.4 $2\sqrt{2}\,(10\sqrt{3} - 8\sqrt{2})$

4.5 $\sqrt[4]{48x^4/y^{24}}$

4.6 $\sqrt[3]{125x^{12}/y^6}$

4.7 $\sqrt[4]{3/243}$

4.8 $\frac{k-2}{k^2}\,if\ k = 1 + \sqrt{3}$

Vraag 5

Los vir x op:

5.1 $\sqrt{(x-1)} = 2$

5.2 $\sqrt{(x+3)} = 5$

5.3 $\sqrt{(x-1)} = 4$

5.4 $x - \sqrt{(-8x-16)} = 5$

5.5 $\sqrt{(x+7)} = -7$

5.6 $\sqrt{11} + \sqrt{y} = \sqrt{(y-2)}$

Vergelykings en ongelykhede

Oorsig

Hoofstuk 2 Bladsy 10 Vergelykings en ongelykhede	**Eenheid 1 Bladsy 11**	
	Oplossing van kwadratiese vergelykings deur faktorisering	• Definisies • Oplossing van kwadratiese vergelykings • Kwadratiese vergelykings wat breuke behels • Kwadratiese vergelykings wat vierkantswortels behels • Kwadratiese vergelykings wat vierkante behels • Oplossing van kwadratiese vergelykings deur vervanging
	Eenheid 2 Bladsy 16	
	Voltooiing van die vierkant	• Los vir x op deur die vierkant te voltooi
	Eenheid 3 Bladsy 17	
	Die kwadratiese formule	• Los vir x op deur die kwadratiese formule te gebruik
	Eenheid 4 Bladsy 18	
	Kwadratiese ongelykhede	• Faktoriseringongelykhede
	Eenheid 5 Bladsy 19	
	Gelyktydige vergelykings	• Los vir x en y op deur die vergelykings gelyktydig op te los
	Eenheid 6 Bladsy 21	
	Woordprobleme	• Oplossing van woordprobleme
	Eenheid 7 Bladsy 23	
	Die aard van wortels	• Die wortels van 'n vergelyking • Kwadratiese teorie • Die aard van wortels

In hierdie hoofstuk gaan ons leer van faktorisering, en hoe om volkome vierkante te voltooi. Ons gaan ook kyk na die kwadratiese formule, en hoe jy kwadratiese ongelykhede kan oplos. Dit lei ook tot die oplossing van gelyktydige vergelykings en die aard van wortels. Die beste tyd om te begin is nou!

Eenheid 1

Oplossing van kwadratiese vergelykings deur faktorisering

1.1 Definisies

- 'n Kwadratiese, of tweedegraadse, vergelyking het die standaardvorm van $ax^2 + bx + c$, waar a, b en c konstantes is en $a \neq 0$.
- Die oplossings daarvan word wortels genoem, en om die wortels te vind, gebruik ons die nulprodrukbeginsel:

  As $a \times b = 0$, dan $a = 0$ of $b = 0$, of a en b is albei 0 ..

1.2 Oplossing van kwadratiese vergelykings

- Die oplossing van kwadratiese vergelykings behels die volgende stappe:
  1. Vereenvoudig die vergelyking.
  2. Skryf die vergelyking in standaardvorm.
  3. Faktoriseer die vergelyking.
  4. Pas die nulprodukreël toe.

Voorbeeld 1

Los vir x op:

1 $-x^2 + x = 5 - 2x - 3x^2$

$\therefore 2x^2 + 3x - 5 = 0$

$\therefore (2x + 5)(x - 1) = 0$

$\therefore 2x + 5 = 0$ of $x - 1 = 0$

$\therefore x = -\dfrac{5}{2}$ of $x = 1$

2 $(3x + 2)(x - 5) = 0$

$\therefore 3x + 2 = 0$ of $x - 5 = 0$

$\therefore 3x = -2$ of $x = 5$

$\therefore x = -\frac{2}{3}$ of $x = 5$

3 $3x^2 - 5x = 0$

$\therefore x(3x - 5) = 0$

$\therefore x = 0$ of $3x - 5 = 0$

$\therefore 3x = 5$

$\therefore x = \frac{5}{3}$

1.3 Kwadratiese vergelykings wat breuke behels

$\frac{1}{x} \leftarrow$ Die noemer is nooit nul nie!

- Ons los kwadratiese vergelykings wat breuke bevat, presies op dieselfde manier op as vroeër.
- Jy moet een goue reël hier onthou, en dit is *dat die noemer nooit nul kan wees nie*!
- Dit beteken dat, as die noemer 'n veranderlike bevat, daardie veranderlike dan in aanmerking geneem moet word, bv. as die noemer $x - 9$ is, beteken dit dat $x - 9 \neq 0$, dus $x \neq 9$.

Voorbeeld 2

Los vir x op:

1 $(x - 3)/(x^2 + 3x + 2) - 4/(-x - 1) = 5/(x^2 - 4)$

$\therefore (x - 3)/(x^2 + 3x + 2) + 4/(x + 1) = 5/(x^2 - 4)$

[Vermenigvuldig $(-x - 1)$ met -1]

$\therefore (x - 3)/(x + 2)(x + 1) - 4/(x + 1) = 5/(x^2 - 4)$

[Faktoriseer noemer]

$\therefore x \neq -2$ en $x \neq 2$ en $x \neq -1$ [Sorteer beperkings uit]

$\therefore (x - 3)(x - 2) + 4(x + 2)(x - 2) = 5(x + 1)$

[Deel noemer deur die KGV en vermenigvuldig]

$\therefore (x - 3)(x - 2) + 4(x^2 - 4) = 5(x + 1)$ [Antwoord met teller]

$\therefore x^2 - 5x + 6 + 4x^2 - 16 = 5x + 5$ [Vermenigvuldig die hakies uit]

$\therefore x^2 - 5x + 6 + 4x^2 - 16 - 5x - 5 = 0$ [Neem alles na die linkerkant]

$\therefore 5x^2 - 10x - 15 = 0$ [Vereenvoudig na standaardvorm]

$\therefore x^2 - 2x - 3 = 0$

$\therefore (x - 3)(x + 1) = 0$ [Faktoriseer]

$\therefore x - 3 = 0$ of $x + 1 = 0$ [Nulprodukbeginsel]

$\therefore x = 3$ of $x = -1$, maar $x \neq -1$ [Toets vir beperkings]

1.4 Kwadratiese vergelykings wat vierkantswortels behels

- Ons verwyder die vierkantswortel deur albei kante van die vergelyking te kwadreer.

Voorbeeld 3

Los vir x op:

1 $\sqrt{x-1} - 1 = -x$

$\therefore \sqrt{x-1} = -x + 1$ [Isoleer die wortel]

$\therefore (\sqrt{x-1})^2 = (-x+1)^2$ [Kwadreer albei kante]

$\therefore x - 1 = x^2 - 2x + 1$ [Vermenigvuldig hakies uit]

$\therefore x - 1 - x^2 + 2x - 1 = 0$ [Neem alles na die linkerkant]

$\therefore -x^2 + 3x - 2 = 0$ [Vereenvoudig tot standaardvorm]

$\therefore x^2 - 3x + 2 = 0$ [Vermenigvuldig met 'n negatief]

$\therefore (x-1)(x-2) = 0$ [Faktoriseer}

$\therefore x - 1 = 0$ or $x - 2 = 0$ [Nulprodukbeginsel]

$\therefore x = 1$ or $x = 2$

1.5 Kwadratiese vergelykings wat vierkante behels

- Wanneer vierkante by kwadratiese vergelykings ingesluit is, kry ons die vierkantswortel van albei kante om die probleem op te los.
- Onthou om seker te maak dat die uitdrukking wat die veranderlike bevat, aan die een kant van die vergelyking is.

Voorbeeld 4

Los vir x op:

1 $(x-2)^2 = 4$

$\therefore \sqrt{(x-2)^2} = \pm\sqrt{4}$

$\therefore x - 2 = \pm 2$

$\therefore x = 2 \pm 2$

$\therefore x = 0$ of $x = 4$

2 $x^2 = 25$

$\therefore \sqrt{x^2} = \pm\sqrt{25}$

$\therefore x = \pm 5$

1.6 Oplossing van kwadratiese vergelykings deur vervanging

- Wanneer 'n vergelyking te ingewikkeld voorkom om mee te werk, soek 'n gemeenskaplke faktor in sommige van die uitdrukkings en vervang dit deur iets eenvoudigs, soos die veranderlike *k*.
- Vereenvoudig nou die vergelyking.
- Vervang dan die gemeenskaplike faktor terug in die plek van *k*, en los die vergelyking op.
- Die vervangingsmetode maak 'n ingewikkelde vergelyking makliker om mee te werk.

Voorbeeld 5

1 $2(x-6)^2 - 5(x-6) - 12 = 0$ Laat $(x-6) = m$

[Onthou, jy kan enige veranderlike hier gebruik, solank dit nie reeds in die probleem voorkom nie.]

Nou het ons $2m^2 - 5m - 12 = 0$ $\therefore (2m+3)(m-4) = 0$

$\therefore 2m + 3 = 0$ of $m - 4 = 0$

$\therefore m = \frac{3}{2}$ of $m = 4$, but $m = x - 6$

$\therefore x - 6 = \frac{3}{2}$ of $x - 6 = 4$

$\therefore x = \frac{3}{2} + 6$ of $x = 4 + 6$

$\therefore x = \frac{15}{2}$ of $x = 10$

Voltooiing van die vierkant

2.1 Los vir *x* op deur die vierkant te voltooi

- 'n Volkome vierkant is 'n rasionale getal (of 'n uitdrukking) wat gelyk is aan die vierkant van 'n ander rasionale getal (of uitdrukking).
- 16 is 'n volkome vierkant: $4 \times 4 = 4^2 = 16$.
- $(x + 5)^2$ is 'n volkome vierkant: $(x + 5) \times (x + 5) = (x + 5)^2 = x^2 + 10x + 25$.
- As 'n uitdrukking nie 'n volkome vierkant is nie, kan ons dit 'n volkome vierkant maak deur dieselfde term aan albei kante by te voeg.

Voorbeeld 6

Los die volgende vergelykings op deur die vierkant te voltooi.

1 $x^2 - 8x - 6 = 0$ $x^2 - 8x = 6$

$\therefore x^2 - 8x + (\frac{b}{2})^2 = 6 + (\frac{b}{2})^2$

$\therefore x^2 - 8x + 16 = 6 + 16 = 22$

$\therefore (x - 4)^2 = 22$ $\therefore \sqrt{(x-4)^2} = \pm\sqrt{22}$

$\therefore x - 4 = \pm\sqrt{22}$ $\therefore x = 4 \pm \sqrt{22}$

$\therefore x = -0{,}6904$ or $x = 8{,}6904$

2 $2x^2 + 8x - 6 = 0$

$x^2 + 4x - 3 = 0$ $x^2 + 4x = 3$

$\therefore x^2 + 4x + (\frac{b}{2})^2 = 3 + (\frac{b}{2})^2$

$\therefore x^2 + 4x + 4 = 7$

$\therefore (x + 2)^2 = 7$

$\therefore \sqrt{(x+2)^2} = \pm\sqrt{7}$

$\therefore x + 2 = \pm\sqrt{7}$

$\therefore x = \pm\sqrt{7} - 2$

$\therefore x = -4{,}6458$ of $x = 0{,}6458$

3.1 Los vir *x* op deur die kwadratiese formule te gebruik

- Die kwadratiese formule is 'n algemene formule wat ons kan aflei. Dit gee vir ons die wortels van *enige* kwadratiese vergelyking. Ons lei dit af deur die vierkant te voltooi:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{(b^2 - 4ac)}}{2a}$$

Voorbeeld 7

Los vir x op deur die kwadratiese formule te gebruik:

1 $2x^2 + 9x - 6 = 0$ $a = 2;$ $b = 9;$ $c = 6$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4(2)(6)}}{2(2)}$$

$$\therefore x = \frac{-9 \pm \sqrt{33}}{4}$$

$\therefore x = -7{,}3723$ of $x = -1{,}6277$

2 $x^2 + 7x = 5$

$\therefore x^2 + 7x - 5 = 0$ $a = 1;$ $b = 7;$ $c = -5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\therefore x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$$

$\therefore x = \frac{-7 \pm \sqrt{69}}{2}$ $\therefore x = -7{,}6533$ of $x = 0{,}6533$

Eenheid 4

Kwadratiese ongelykhede

4.1 Faktorisering van ongelykhede

- Die enigste verskil tussen ongelykhede en vergelykings is die teken, en enigiets wat jy aan 'n vergelyking kan doen, kan jy ook aan 'n ongelykheid doen.
- Maar onthou dat ongelykhede addisionele reëls het.
- Wanneer deur 'n negatiewe getal gedeel word om 'n ongelykheid op te los, verander die teken.
- Oplossings vir ongelykhede word op 'n getallelyn voorgestel.

Voorbeeld 8

Los vir x op:

1 $x^2 + 2x - 35 \leq 0$

$\therefore\ (x + 7)(x - 5) \leq 0$ ($x = -7$ en $x = 5$ is die kritiese waardes)

Vir $x + 7$:

$x - 7 = 0$ as $x = 7$

$x - 7 < 0$ as $x < 7$

$x - 7 > 0$ as $x > 7$

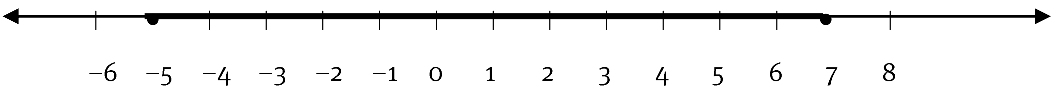
Vir $x - 5$:

$x + 5 = 0$ as $x = -5$

$x + 5 < 0$ as $x < -5$

$x + 5 > 0$ as $x > -5$

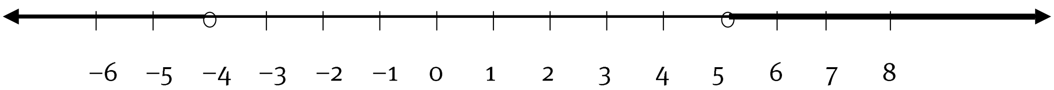
Ons kan die resultaat op 'n getallelyn voorstel:



Dus, die oplossing vir $(x - 7)(x + 5) \leq 0$ is $-5 \leq x \leq 7$

2 $x^2 - x - 20 > 0$

$(x + 4)(x - 5) > 0$



Die oplossing is $x < -4$ of $x > 5$

5.1 Los vir *x* en *y* op deur die vergelykings gelyktydig op te los

- Wanneer jy twee vergelykings met twee veranderlikes sien, kan jy vir albei veranderlikes oplos deur die vergelykings gelyktydig op te los.
- Wanneer hierdie vergelykings op 'n assestel geteken word, sal die snypunt(e) van die grafieke vir jou die waarde(s) van die veranderlikes gee.
- Wanneer jy 'n parabool ('n kwadratiese vergelyking) en 'n reguit lyn op dieselfde assestelsel teken, kan jy óf geen snypunte hê nie, of een snypunt of twee snypunte. Dit beteken dat die veranderlikes x en y sal geen, een of twee oplossings hê.
- Ons los gelyktydige vergelykings algebraïes soos volg op:
  1. Skryf albei vergelykings neer en nommer hulle: (1) vir die reguit lyn en (2) vir die parabool.
  2. Maak y die onderwerp van die reguitlynvergelyking, nommer dit (3), en vervang (3) in (2).
  3. Gebruik die waarde vir x wat hierbo bereken is, (onthou, jy kan geen, een of twee waardes vind) en vervang dit in (1) om vir y op te los

Voorbeeld 9

Los vir x en y in elke geval op:

1 $3x - y = -9$ (1)

$x^2 + 2x - y = 3$ (2)

Uit (1): $y = 3x + 9$ (3)

Vervang (3) in (2):

$x^2 + 2x - (3x + 9) = 3$

$x^2 + 2x - 3x - 9 - 3 = 0$

$x^2 - x - 12 = 0$

$(x + 3)(x - 4) = 0$

$x = -3$ of $x = 4$

Vervang die x -waardes in (3):

Vir $x = -3$ Vir $x = 4$

$y = 3(-3) + 9$ $y = 3(4) + 9$

$y = 0$ $y = 21$

Vir $x = -3,\ y = 0$ Vir $x = 4,\ y = 21$

$(-3;\ 0)$ $(4;\ 21)$

2 $y - 6x = 12$ (1)

$x^2 + 4x - 9 = 5y$ (2)

Uit (1): $y = 6x + 12$ (3)

Vervang (3) in (2):

$x^2 + 4x - 9 = 5(6x + 12)$

$x^2 + 4x - 9 = 30x + 60$

$x^2 + 4x - 9 - 30x - 60 = 0$

$x^2 - 26x - 69 = 0$

$x^2 + 26x + 69 = 0$

$x = \dfrac{-b\ \pm\ \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= -26 \pm \sqrt{676 - 4(1)(69)}/2$

$= (-26 \pm \sqrt{400})/2$

$x = -23$ or $x = -3$

Vervang die x -waardes in (3):

Vir $x = -23$ Vir $x = -3$

$y = 6(-23) + 12$ $y = 6(-3) + 12$

$y = -126$ $y = -6$

Vir $x = -23;\ y = -126$ Vir $x = -3;\ y = -6$

$(-23;\ -126)$ $(-3;\ -6)$

6.1 Oplossing van woordprobleme

- Wanneer lewensegte probleme wat wiskundig opgelos moet word, in woorde gestel word, word die probleme woordprobleme genoem.
- Die vier stappe om woordprobleme op te los:
  1. Verstaan die probleem.
  2. Maak 'n plan (skryf die probleem in wiskundige terme neer).
  3. Voer jou plan uit (los die probleem op).
  4. Assesseer jou antwoord vir die probleem (toets die geldigheid van jou antwoord).

Voorbeeld 10

Nomsa besit 'n spazawinkel in Pretoria. Sy koop pakkies grondboontjies vir R1 500. Sy gee 20 van die pakkies weg aan lojale klante, en sy verkoop die res van die pakkies teen R4 meer (elk) as wat sy daarvoor betaal het. Sy maak 'n wins van R1 860 op die pakkies grondboontjies. Stel vas hoeveel pakkies sy gekoop het, die kosprys van die pakkies en haar verkoopprys.

Stap 1: Koop pakkies grondboontjies ⇢ gee 20 weg ⇢ verkoop die res

Verkoopprys = R4 meer as kosprys

Wins = R1 860

Stap 2: Laat x die aantal pakkies wees. Dan:

Kosprys = 1 500/x

Pakkies verkoop = $x - 20$

Totale bedrag geld gemaak = R1 500 + R1 860 = R3 360

Verkoopprys R3 360/(x-20)

Verkoopprys kosprys + R4

kosprys = R4

Stap 3: $\frac{3\,360}{x-20} = \left(\frac{1500}{x}\right) + 4$

$3\,360x = 1\,500(x-20) + 4x(x-20)$

$3\,360x = 1\,500x - 30\,000 + 4x^2 - 80x$

$4x^2 - 1940x - 30\,000 = 0$

$x^2 - 485x - 7\,500 = 0$ $\quad a = 1; \quad b = -485; \quad c = -7\,500$

$$x = \frac{485 \pm \sqrt{(-485)^2 - 4(1)(-7\,500)}}{2(1)}$$

$$x = \frac{485 \pm 515}{2}$$

$x = -15$ of $x = 500$

Stap 4: Omdat Nomsa nie 'n negatiewe aantal pakkies kan koop nie, is -15 ongeldig. Dus het sy 500 pakkies grondboontjies gekoop.

Kosprys $= \frac{1\,500}{500} = \text{R}3$

Verkoopprys $= \text{R}3 + \text{R}4 = \text{R}7$

Eenheid 7

Die aard van wortels

7.1 Die wortels van 'n vergelyking

- Die wortels van 'n vergelyking is die waardes van die veranderlikes wat daardie vergelyking bevredig, byvoorbeeld

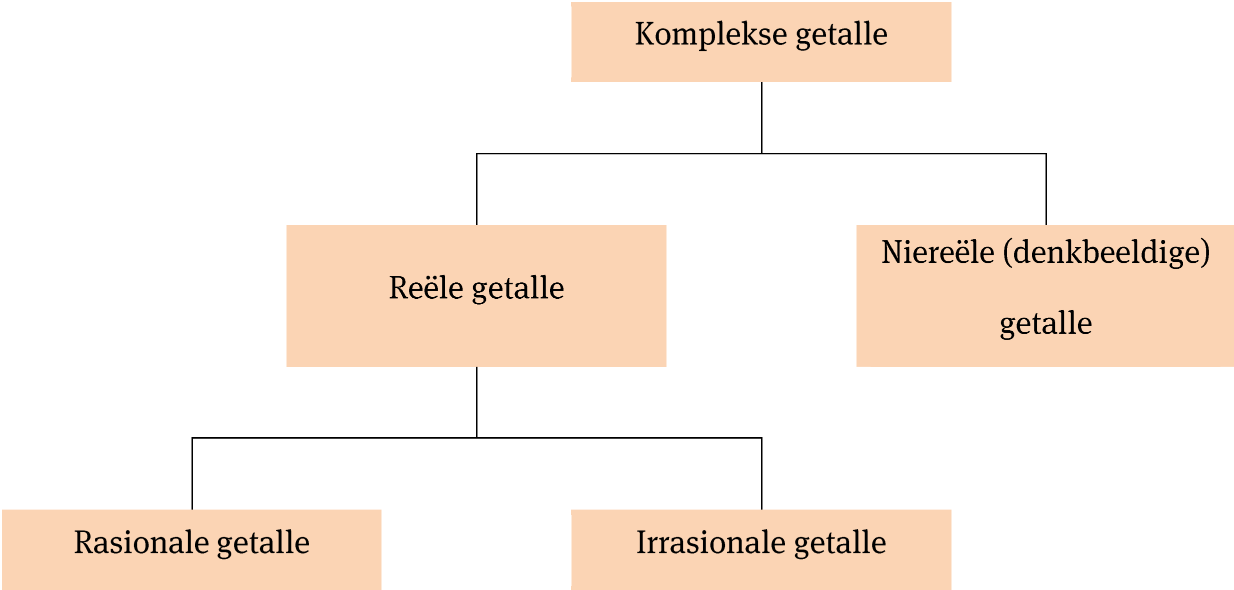
  $x^2 - 4 = 0$

  $(x + 2)(x - 2) = 0$

  Dus $x = -2$ en $x = 2$ is die wortels van die vergelyking.

7.2 Kwadratiese teorie

- Afhangend van hul soort word getalle in 'n getallestelsel gegroepeer:



- Wanneer ons die wortels van kwadratiese vergelykings uitwerk, wil ons uitvind of die wortels reële of niereële getalle is, rasionale of irrasonale getalle, en of hulle gelyk of ongelyk is.
- Ons doen dit deur die waarde onder die vierkantswortel in die kwadratiese formule te gebruik, $b^2 - 4ac$. Hierdie waarde word die diskriminant genoem en word deur Δ (delta) aangedui.
- Gebruik die diskriminant om die wortels te omskryf. As:
  - $\Delta < 0$: is die wortels niereëel
  - $\Delta > 0$: is die wortels reëel
  - $\Delta = 0$: is die wortels gelyk
  - $\Delta =$ volkome vierkant: die wortels is rasionaal.
  - $\Delta \neq$ volkome vierkant: die wortels is irrasionaal.
- Ons kan die feite hierbo gebruik om die aard van enige kwadratiese vergelyking se wortels te bewys.

7.3 Die aard van wortels

- Deur die formule vir Δ soos hierbo beskryf, te gebruik, kan ons die wortels van enige kwadratiese vergelyking kry.
- Deur die waarde van Δ te bereken, kan ons die waarde van 'n onbekende veranderlike in 'n vergelyking bereken as die aard van die wortels aangegee word, bv. $kx^2 - 6x + 4 = 0$, waar k die onbekende veranderlike is.
- Δ bied ons ook die vermoë om te bewys dat die aard van die wortels van 'n kwadratiese vergelyking van 'n sekere soort is..

Voorbeeld 11

1 As $x = 3$ een van die wortels van $x^2 + 3x + k = 0$ is, bepaal die waarde van k en die ander wortel.

Vervang $x = 3$ in die vergelyking om k te kry:

$3^2 + 3(3) + k = 0$

$\therefore 9 + 9 + k = 0$

$\therefore k = -18$

Vervang nou $k = -18$ in die vergelyking en faktoriseer om die ander wortel te kry.

$x^2 + 3x - 18 = 0$

$(x - 3)(x + 6) = 0$

$\therefore x = 3$ of $x = -6$

$\therefore$ Die ander wortel is -6.

2 Kry die aard van die wortels van

2.1 $x^2 + 6x - 9 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= 36 - 4(1)(-9)$

$= 36 + 36$

$= 72$

Δ is positief, maar nie 'n volkome vierkant nie, $\therefore$ wortels is reëel, irrasionaal en ongelyk.

2.2 $x^2 + 8x + 16 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (8)^2 - 4(1)(16)$

$= 64 - 64$

$= 0$

Δ is positief, 'n volkome vierkant en nul,$\therefore$ wortels is reëel, rasionaal en gelyk..

3 Vir watter waardes van m sal die vergelyking

3.1 gelyke wortels hê? 3.2 reële wortels hê? 3.3 nie- reële wortels hê?

$mx^2 - 4x + 5 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac \quad = (-4)^2 - 4(m)(5)$

$= 16 - 20m$

3.1 Vir gelyke wortels, maak $\Delta = 0$:

$16 - 20m = 0$

$\therefore\ 20m = 16$

$\therefore\ m = \frac{4}{5}$

3.2 Vir reële wortels, maak $\Delta \geq 0$:

$16 - 20m \geq 0$

$\therefore 16 \geq 20m$

$\therefore\ m \leq \frac{4}{5}$

3.3 Vir nie-reële wortels, maak $\Delta \leq 0$:

$16 - 20m \leq 0$

$\therefore 16 \leq 20m$

$\therefore\ m \geq \frac{4}{5}$

4 Bewys dat die wortels van $-2x^2 + (a + b)x + 4 = 0$ reëel is vir alle reële waardes van a en b .

$a = -2; \qquad b = (a + b); \qquad c = 4$

$\Delta = b^2 - 4ac$

$= (a + b)^2 - 4(-2)(4)$

$= (a + b)^2 + 32$

Nou moet ons bewys dat Δ groter is as 0 .

Bewys: Enige getal wat gekwadreer word, is positief of 0 . As ons 'n positiewe getal by 'n postiewe getal tel, moet die antwoord altyd positief wees.

$(a + b)^2 \geq 0$

$32 > 0$

$\therefore (a + b)^2 + 32 > 0$

$\therefore \Delta > 0$; $\quad\therefore$ die wortels is reëel.

Vrae

Vraag 1

Los die volgende kwadratiese vergelykings op:

1.1 $(x - 2)(x + 7) = 0$

1.2 $(2y - 3)(y + 5) = 0$

1.3 $x^2 + 21x + 10 = 0$

1.4 $3k(k + 4) = 0$

1.5 $9x^2 - 5x = 0$

1.6 $3k(1 - k) + 5(k + 1) = 0$

1.7 $(3p - 2)(p + 1) + 2 = 0$

1.8 $b(b + 5) = 6$

1.9 $(x - 2)(x + 2) = 6(3x + 5)$

1.10 $4(x - 1)(x + 1) = 3(2 - x) + 5$

Vraag 2

Los vir x op:

2.1 $5/(x - 1) = x/(x + 1)$

2.2 $3/(2x - 6) + x/(x - 3) = 0$

2.3 $(x + 2)/(x - 3) = 7 + 2/(x - 3)$

2.4 $(x - 1)/(x^2 - 9) = 2/(4(x + 3)) - (1 - x)/(x + 1)$

2.5 $1/(x^2 + 2x + 3) + 3/(x^2 + x + 2) = 2/(x^2 + 2x + 3) - 2/(2 - x^2)$

2.6 $\frac{3}{4} + (x + 3)/(2x + 3) = (4x + 3)/(x + 5)$

Vraag 3

Los vir x op:

3.1 $\sqrt{6x+5} = x$

3.2 $\sqrt{x-5} = x-2$

3.3 $\sqrt{2x-3} - x = 0$

3.4 $\sqrt{x-6} + x + 4 = 0$

3.5 $2 = \sqrt{x^2 - 27}$

3.6 $\sqrt{x-1} = \sqrt{4x-2}$

Vraag 4

Los vir x op:

4.1 $x^2 = 81$

4.2 $x^2 = 27$

4.3 $x^2 - 16 = 0$

4.4 $-x^2 + 49 = 0$

4.5 $(x + 4)^2 = 48$

4.6 $5(x + 5)^2 = 125$

4.7 $3(x + 4)^2 - 12 = 0$

4.8 $x^2 = (2x-3)^2$

4.9 $3(x - 2)^2 - 16 = 2$

4.10 $-x = (\frac{1}{2} x + 2)^2 - 6$

Vraag 5

Los vir x op:

5.1 $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 5 = 0$

5.2 $(x^2 - x)^2 = 14(x^2 - x) + 15$

5.3 $\sqrt{x-2} + 4 = 5/\sqrt{x-2}$

5.4 $(\frac{3}{x} + x)^2 + \frac{3}{x} - x = 19$

5.5 $5(2x^2 + x - 1) = 20(2x^2 + x - 1) + 8$

5.6 $2(x + 3)^2 - 3(x+3) - 4 = 2$

5.7 $24/(3(x-2) = 7/(9(x+6)) - 3$

Vraag 6

6.1 Los vir p op:

$p^2 - p - 12 = 0$

6.2 Los vir x op:

$(x^2 + 3x)^2 - (x^2 + 3x) - 12 = 0$

Vraag 7

Gegee $(a + 3)(b + 4) = 0$, los vir b op as $a = -7$.

Vraag 8

As $(y - 2)(x^2 + 25x - 6) = 0$, bepaal y as:

8.1 $x = -7$

8.2 $x = 12$

Vraag 9

Los vir x op deur die vierkant te voltooi:

9.1 $x^2 + 2x + 4 = 0$

9.2 $x^2 - 5x + 15 = 0$

9.3 $x^2 - x + 20 = 0$

9.4 $x^2 + 6x = -5$

9.5 $13x = 10 + x^2$

9.6 $x^2 - 6x = 3$

Vraag 10

Los vir y op:

10.1 $3y(y - 3) - 3 = 0$

10.2 $8y^2 - 2y + 5 = 0$

10.3 $-y^2 - 3y = -2$

10.4 $6 = 3y(y + 4)$

10.5 $\frac{1}{8}y^2 - 2y + 5 = 0$

10.6 $(y + 4)^2 + (y - 4)(y + 3) = 2$

10.7 $(y - 3)(4y + 2) - 9 = 0$

10.8 $y(y + 1{,}5) + 3y = 3y(y - 9) + 0{,}3$

10.9 $5(y + 3) = 3y^2 - 5$

10.10 $2/(y(y + 2)) = 3/(y + 2) - y/(y + 1)$

Vraag 11

Los vir x op:

11.1 $x^2 + 7x - 14 > 0$

11.2 $2x^2 - 9x - 17 < 0$

11.3 $x^2 > 3x - 7$

11.4 $-5x \geq -3x^2 + 8$

11.5 $x^2 \leq 6x - 9$

11.6 $3x + 2 < 5x - 6x^2$

Vraag 12

Los vir elk van die veranderlikes in die volgende vergelykings op:

12.1 $9x - y = 12$
$13y^2 + 4xy - x = 0$

12.2 $y + 6 - 13x = 0$
$xy = -13$

12.3 $y + x - 5 = 0$
$x^2 - 4 = y - 6x$

12.4 $x + y = 5$
$3x^2 + 5x - 19 = 0$

12.5 $3a + 5b = 17a - 6$
$(2a - 4b)(a + b) = 0$

12.6 $n + m = -13$
$n = 3m^2 + 4m - 6$

Vraag 13

13.1 Die som van twee getalle is 15, terwyl die produk van dieselfde getalle 36 is. Bepaal die twee getalle.

13.2 Twee vrugteplukkers pluk vrugte. Vrugteplukker A pluk 750 vrugte in 4 uur, terwyl vrugteplukker B 750 vrugte in 3 uur pluk. Hoe lank sal dit hulle neem om 750 vrugte te pluk as hulle saamwerk?

13.3 Twee treine reis 1 600 km van Kaapstad na Pretoria. Trein A is 15 km per uur vinniger as trein B, en kom 2 uur voor trein B in Pretoria-stasie aan. Bepaal die spoed van trein B.

13.4 Nomsa en Emily besit 'n skoonmaakonderneming. Nomsa neem 2,5 uur langer as Emily om 'n huis skoon te maak. As hulle saamwerk, neem hulle 6 uur om 'n huis skoon te maak. Hoe lank sal dit elkeen van hulle neem om 'n huis op haar eie skoon te maak?

Vraag 14

14.1 Gegee dat -6 een van die wortels van die vergelyking $x^2 + mx - 30 = 0$ is:

14.1.1 Bepaal die waarde van m.

14.1.2 Bepaal nou die ander wortel van die vergelyking.

14.2 As $-\frac{7}{2}$ een van die wortels van $x^2 + kx - 7 = 0$ is, bepaal die waarde van k en die ander wortel.

14.3 Bepaal die waarde van p wat van die volgende uitdrukking 'n volkome vierkant sal maak:

$x^2 - 10x + p$

14.4 Bepaal die waarde van n wat van hierdie vergelyking 'n volkome vierkant sal maak:

$3x^2 - 3x + n$

Vraag 15

Bepaal die waarde van die diskriminant en beskryf die aard van die wortels sonder om die wortels op te los.

15.1 $3x^2 - 6x + 4 = 0$

15.2 $x^2 + 64 = 12x$

15.3 $3x = 5x^2 - 6$

15.4 $x - 3 = -12x^2$

Vraag 16

Vir watter waardes van k sal $3x^2 - 3x + k$ gelyke wortels hê?

Vraag 17

Bepaal die waardes van r waarvoor $x^2 - 3rx + r = 0$ reële wortels het.

Vraag 18

Bewys dat $x^2 + (k-1)x + k = 0$ rasionale wortels vir alle rasionale waardes van k het.

Vraag 19

Toon dat die wortels van $x^2 + m = (m+2)x$ reëel sal wees vir alle reële en ongelyke waardes van m .

Hoofstuk 3

Getalpatrone

Oorsig

	Eenheid1 Page 32	
Hoofstuk 3 Bladsy 31 Getalpatrone	Getalpatrone met 'n konstante tweede verskil	• Bepaal die konstante tweede verskil

Tot dusver in jou wiskundeloopbaan het jy van lineêre getalpatrone geleer. Dit beteken dat daar 'n konstante verskil tussen opeenvolgende terme in die ry is.

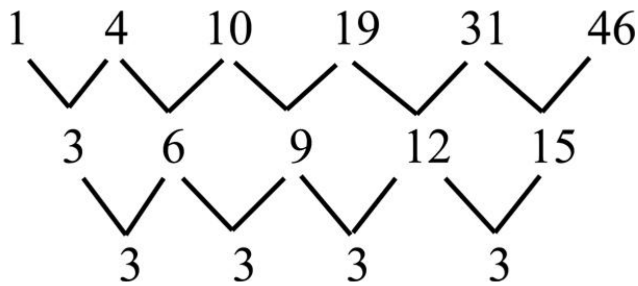
In hierdie hoofstuk leer ons van getalpatrone met 'n konstante *tweede* verskil. Dit beteken dat daar 'n konstante verskil tussen die eerste verskilwaardes in 'n ry van getalle is.

Onthou, ons gebruik T_n om 'n algemene term in 'n ry voor te stel, waar $n \in N$.

Getalpatrone met 'n konstante tweede verskil

1.1 Bepaal die tweede verskil

- Wanneer jy 'n ry het, sê : $1;\ \ 4;\ \ 10;\ \ 19;\ \ 31;\ \ 46;$ is dit maklik om die eerste ry van verskille uit te werk. Hulle is $3;\ \ 6;\ \ 9;\ \ 12;\ \ 15$.



- En nou, om die tweede verskille uit te werk, doen ons presies dieselfde as toe ons die eerste verskille bereken het, maar ons gebruik die ry van eerste verskille in plaas van die oorspronklike ry getalle.
- Die tweede verskille is $3;\ \ 3;\ \ 3;\ \ 3$.
  En ja, jy's reg; hierdie ry het 'n konstante tweede verskil! As die tweede verskille van 'n ry konstant is, dan is die formule vir die algemene term kwadraties.
  Dit beteken die algemene term sal die vorm $T_n = an^2 + bn + c$ hê.

Voorbeeld 1

1 Bepaal die algemene term vir die ry $-1;\ 9;\ 23;\ 41;\ \ldots$

Die eerste verskille is $10;\ 14;\ 18;\ \ldots$

Die tweede verskille is $4;\ 4;\ \ldots$

$\therefore$ Die vorm van die algemene term sal wees $T_n = an^2 + bn + c$.

Kom ons begin deur die vervanging van T_1 en T_2 .

$T_1 = -1 \qquad \therefore -1 = a + b + c \qquad (1)$

$T_2 = 9 \qquad \therefore\ 9 = 4a + 2b + c \qquad (2)$

Dan (1) − (2) gee $-10 = -3a - b \qquad (3)$

Deur vervanging van $T_3 = 23$ kry ons

$23 = 9a + 3b + c \qquad (4)$

Dan (4) (2) gee $14 = 5a + b \qquad (5)$

en (5) + (3) gee $4 = 2a$

$\therefore a = 2$ en $b = 4$

Deur vervanging van $a = 2$ en $b = 4$ in (1) kry ons

$$-1 = 2 + 4 + c$$

$$\therefore\ c = -7$$

$$\therefore T_n = 2n^2 + 4n - 7$$

2 Bepaal die algemene term vir die ry $0;\ 30;\ 92;\ 186;\ \ldots$

Die eerste verskille is $30;\ 62;\ 94;\ \ldots$

Die tweede verskille is $32;\ 32;\ \ldots$

$\therefore$ Die vorm van die algemene term sal wees $T_n = an^2 + bn + c$.

Vervang T_1 en T_2.

$T_1 = 0 \qquad \therefore\ 0 = a + b + c \qquad$ (1)

$T_2 = 30 \qquad \therefore\ 30 = 4a + 2b + c \qquad$ (2)

(1) (2) gee $-30 = -3a - b \qquad$ (3)

Deur vervanging van $T_3 = 92$ kry ons

$92 = 9a + 3b + c \qquad$ (4)

(4) (2) gee $62 = 5a + b \qquad$ (5)

en (5) + (3) gee $32 = 2a$

$\therefore\ a = 16$ en $b = -18$

Deur vervanging van $a = 16$ en $b = -18$ in (1) kry ons

$$0 = 16 - 18 + c$$

$$\therefore\ c = 2$$

$$\therefore T_n = 16n^2 - 18n + 2$$

Vrae

Vraag 1

Dink goed na oor die volgende rye::

1.1 $9;\ 16;\ 25;\ 36;\ \ldots$

1.2 $4;\ 15;\ 32;\ 55;\ \ldots$

1.3 $1;\ 16;\ 33;\ 52;\ \ldots$

1.4 $-4;\ 5;\ 24;\ 53;\ \ldots$

1.5 $5;\ 33;\ 95;\ 191;\ \ldots$

Vir elke ry:

i Bepaal die tweede verskille tussen die terme.

ii Skryf die volgende vyf terme van elke ry neer.

iii Bepaal die algemene term van die ry.

iv Bepaal die waarde van T_{12} en T_{30}.

Vraag 2

Die algemene term vir 'n ry met 'n kwadratiese patroon word aangegee deur

$T_1 = 1;\ T_n = x^2 - x + 1\ for\ n \geq 1.$

2.1 Skryf die eerste sewe terme van die ry neer.

2.2 Druk die algemene term uit in die vorm $T_n = an^2 + bn + c$.

2.3 Watter term in die ry is 133 ? Water term is 1 407 ?

Oorsig

Hoofstuk 4 Bladsy 35 Analitiese meetkunde	**Eenheid 1 Bladsy 36** Die helling van 'n lyn	• Bepaal die gradiënt en helling van 'n reguit lyn
	Eenheid 2 Bladsy 38 Die vergelyking van 'n reguit lyn	• Die gradiënt en die *y*-afsnit • Die gradiënt en een punt op die lyn • Vergelyking van 'n lyn wat deur twee punte gaan • Vergelyking van 'n lyn deur een punt en ewewydig aan of loodreg op 'n gegewe lyn
	Nuttige inligting Bladsy 39	

Analitiese meetkunde staan ook bekend as Koördinaatmeetkunde en kombineer Meetkunde en Algebra. In hierdie hoofstuk sal jy leer hoe om die helling van 'n lyn te bereken, hoe om die vergelyking van 'n reguitlyngrafiek te bepaal as sekere koördinate en ander inligting gegee word, en hoe om probleme wat driehoeke behels, op te los.

Die helling van 'n lyn

1.1 Bepaal die gradiënt en helling van 'n reguit lyn

- Die gradiënt van 'n lyn is die skuinste of steilheid daarvan.
- Die volgende formules is nuttig om verskillende waardes te bereken:
  - Die afstand tussen punte A en B:
    $AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
  - Die gradiënt van 'n lyn:
    $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
  - Die middelpunt tussen twee punte:
    Middelpunt $= \left(\frac{(x_1 + x_2)}{2}; \frac{(y_1 + y_2)}{2}\right)$
- Die helling van 'n lyn AB is die hoek θ wat tussen die lyn en die positiewe x-as gevorm word.
- Vir skerphoeke $(0 < \theta \leq 90°)$ is die gradiënt positief en is $\tan\theta$ positief.
- Vir stomphoeke $(0 < \theta \leq 180°)$ is die gradiënt negatief en is $\tan\theta$ negatief.
- Die helling van AB = θ waar $\tan\theta =$ gradiënt van AB (ons dui dit aan as m_{AB}).
- Twee ewewydige lyne met hellings θ en α, het $m_1 = m_2$ en $\tan\theta = \tan\alpha$.
- Twee loodregte lyne met hellings en α het $m_1 \times m_2 = -1$ en $\tan\theta \times \tan\alpha = -1$.

Voorbeeld 1

1 Bepaal die helling van die lyn met gradiënt -2.

$\tan\theta = m$

$\therefore \tan\theta = -2$

$\therefore \theta = -63{,}43°$

2 Bepaal die helling van lyn KY as K$(-12; 9)$ en Y$(6; 3)$.

$\tan\theta = m_{KY}$

$= (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$

$= (3 - 9)/(-12 - 6)$ $= \frac{-6}{-18} = \frac{1}{3}$

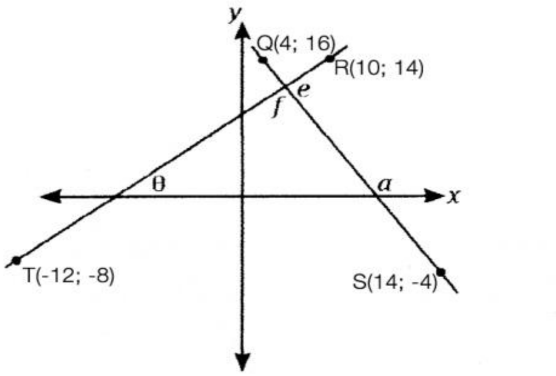
$\therefore \theta = 18{,}43°$

3 Bereken die gradiënt van die lyn met helling van $52{,}6°$.

$m = \tan\theta$ $\therefore m = \tan 52{,}6°$

$= 1{,}31$

4 Kyk goed na die tekening hieronder en bereken die groottes van θ, α, e en f.



5 Bepaal of LM ewewydig is aan of loodreg is op YZ in elke geval.

5.1 L(7; 6), M(−5; −1), Y(7; 2), Z(−5; −5)

5.2 L(−2; 5), M(−8; 2), Y(4; 3), Z(−2; 0)

5.3 L(6; 1), M(−1; −3), Y(6; 4), Z(−1; 0)

5.4 L(−6; 3), M(−3; −1), Y(7; 7), Z(3; 4)

5.5 L(−1; −6), M(3; −1), Y(7; −1), Z(2; 3)

Die vergelyking van 'n reguit lyn

2. 1 Die gradiënt en die *y*-afsnit

- Wanneer die gradiënt en die y -afsnit van 'n reguit lyn vir ons gegee word, gebruik ons die vergelyking $y = mx + c$ om die vergelyking met die gegewe inligting te bepaal. Onthou dat m die gradiënt is en c die y -afsnit is.

2.2 Die gradiënt en een punt op die lyn

- Wanneer die gradiënt en een punt op die reguit lyn vir ons gegee word, gebruik ons die vergelyking $y - y_1 = m(x - x_1)$ om die vergelyking van die reguit lyn met die gegewe inligting te bepaal.

2.3 Vergelyking van 'n lyn wat deur twee punte gaan

- Wanneer daar vir ons twee punte op 'n lyn gegee word, moet ons eers die gradiënt m bereken en dan dieselfde vergelyking as in 2.2 gebruik.

2.4 Vergelyking van 'n lyn deur een punt en ewewydig aan of loodreg op 'n gegewe lyn

- Om die vergelyking van 'n lyn soos die een wat hierbo beskryf word, te bepaal, moet ons die volgende eenvoudige stappe volg:
  1 Skryf die vergelyking van die gegewe lyn in standaardvorm om m en c te bepaal.
  2 Bereken die gradiënt van die lyn met die onbekende vergelyking deur die reëls oor ewewydige en loodregte lyne, soos in Hoofstuk 4, Eenheid 2 hierbo bespreek, te gebruik.
  3 Vervang m en die koördinate van die gegewe punt in die standaardvergelyking vir 'n reguit lyn om die vergelyking te bepaal.

Voorbeeld 2

1 Bepaal die vergelyking van die lyn met gradiënt -2 en y -afsnit 17.

$y = mx + c$, dus $y = -2x + 17$.

2 Bepaal die vergelyking van die lyn met gradiënt en wat 7 deur punt $(-2,7)$ gaan

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore\ y - 7 = 7(x + 2)$

$\therefore\ y = 7x + 14 + 7$

$\therefore\ y = 7x + 21$

3 Bepaal die vergelyking van die lyn wat deur die punte
K$(3;\ -2)$ en L$(-4;\ -3)$ gaan.

Eerstens bepaal ons die gradiënt:

$m_{\text{KL}} = (y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$

$= (-3 - (-2))/(-4 - 3)$

$= -1/-7$

$= \frac{1}{7}$

Tweedens kies ons enigeen van die twee punte. Kom ons gebruik L$(-4;\ -3)$.

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$\therefore\ y - (-3) = \frac{1}{7}(x - (-4))$

$\therefore\ y = \frac{1}{7}x + \frac{4}{7} - 3$

$= \frac{1}{7}x - \frac{17}{7}$

Nuttige inligting

Die swaartelyn van 'n driehoek

- Die swaartelyn van 'n driehoek halveer sowel die teenoorstaande sy as die oppervlakte van 'n driehoek.
- As KL die swaartelyn van 'n driehoek is, kan ons die koördinate van L met behulp van die middelpuntformule bereken.
- Ons kan punte K en L gebruik om die vergelyking van die swaartelyn te bepaal.

Die hoogtelyn van 'n driehoek

- Die hoogtelyn van 'n driehoek is loodreg op die teenoorstaande sy.

- As ons die hoogtelyn PQ wil bepaal, moet ons die gradiënt van lyn ST wat loodreg daarop is, bepaal.
  Ons weet $m_{ST} \times m_{PQ} = -1$, dus kan ons m_{PQ} bepaal. Dan kan ons m_{PQ} en die koördinate van punt P gebruik om die vergelyking van hoogtelyn PQ te bepaal.

Middelloodlyne

- Twee lyne is middelloodlyne as hulle mekaar teen 'n hoek van $90°$ (loodreg) sny en mekaar presies in die helfte verdeel (halveer).
- Om die vergelykings van twee middelloodlyne te bereken:
  1. Bepaal die koördinate van die punt by die snypunt met behulp van die middelpuntformule.
  2. Bereken die gradiënt van een van die lyne (kom ons noem dit lyn 1).
  3. Gebruik dan die $m_1 \times m_2 = -1$ -eienskap om m_2 te bereken.
  4. Gebruik die koördinate van die snypunt en m_2 om die vergelyking van lyn 2 te bepaal.

Vrae

Vraag 1

Bepaal die helling van die lyne as óf die gradiënt óf twee punte gegee word

1.1 15

1.2 12/2

1.3 ¾

1.4 −3

1.5 −0,125

1.6 Q(−4; −7) en R(−6; 2)

1.7 Q(8; −3) en R(5/7; 13)

1.8 Q(−3; −1) en R(1; −4)

1.9 Q(−2; −4) en R(−6; −1)

1.10 Q(5; −1) en R(−12; 7)

Vraag 2

Bereken die gradiënt van die lyn met helling:

2.1 $72°$

2.2 $250°$

2.3 $13°$

2.4 $-126°$

2.5 $-50,8°$

2.6 $185,15°$

Vraag 3

Bepaal in elke geval of AB ewewydig aan CD is, of loodreg op CD is, of nie een van die twee is nie.

3.1 A(–1; 5), B(7; 8), C(5; –2), D(16; 3)

3.2 A(–5; –5), B(7; 2), C(–5; –1), D(7; 6)

3.3 A(–9; 6), B(–5; –7), C(9; –3), D(4; 7)

3.4 A(2; 5), B(3; 2), C(–9; 3), D(1; 3)

3.5 A(9; 1), B(8; 4), C(–4; 3), D(2; 5)

Vraag 4

Bepaal die vergelyking van die lyn:

4.1 met gradiënt = 5, y-afsnit = –17

4.2 met gradiënt = –2/5, y- afsnit = 9

4.3 met gradiënt m = 7/3, wat deur punt (–13; 5) gaan

4.4 met gradiënt m = –5, wat deur punt (–2; –1) gaan

4.5 wat deur punte (–4; 5) en (–1; –1) gaan

4.6 wat deur punte (13; –12) en (–5; 9) gaan

4.7 BC as BC ewewydig aan 5y = x – 15 is en deur die punt (–1; 4) gaan

4.8 KT as KT loodreg op lyn BS is, wat vergelyking 2y = 6x – 7 het en deur punt (4/3; 0,5) gaan

Oorsig

Hoofstuk 5 Bladsy 42 Funksies	**Eenheid 1 Bladsy 43**	
	Ondersoek die uitwerking van die parameter *p*	• Punt-vir-punt-stipping • Teken sketsgrafieke • Bepaal die vergelykings van grafieke • Vertolk grafieke
	Eenheid 2 Bladsy 46	
	Gemiddelde gradiënt tussen twee punte op 'n kromme	• Gemiddelde gradiënt
	Eenheid 3 Page 47	
	Trigonometriese grafieke	• Hersiening van die basiese grafieke • Ondersoek die uitwerking van die parameter p op die grafiek van $y = \sin(x + p)$ • Sketsgrafieke van trigonometriese funksies wat minstens twee van die parameters a, p en q bevat • Vertolk grafieke

Funksies is oral om ons, en kan gebruik word om die verhouding tussen dinge wiskundig te beskryf. In hierdie hoofstuk sal jy sleutelbegrippe uit Graad 10 hersien. Jy sal ook die uitwerking van verskillende parameters op sekere funksies ondersoek en hoe om die gemiddelde gradiënt tussen twee punte te bereken. Jy sal werk met trigonometriese grafieke, en leer hoe verskillende parameters die vorm en posisie daarvan beïnvloed.

1.1 Punt-vir-punt-stipping

- Wanneer ons funksies wil stip, is dit maklik om te onthou wat gebeur met die vorm en posisie van die grafieke wanneer veranderlikes bygevoeg word.
- Kom ons kyk na 'n **parabool** $y = ax^2$. As x deur $x + p$ vervang word, sal die waarde van p die volgende invloed op die posisie van die grafiek hê:
  - As $p > 0$, sal die grafiek p eenhede na links skuif.
  - As $p < 0$, sal die grafiek p eenhede na regs skuif.

  Die vorm verander nie, wat beteken dat die grafieke kongruent is.
- Kom ons kyk nou na die **hiperbool** $y = \frac{a}{x+p}$:
  - As $p > 0$, skuif die grafiek p eenhede na links (onthou, die asimptoot skuif ook p eenhede na links).
  - As $p < 0$, skuif die grafiek p eenhede na regs (onthou, die asimptoot skuif ook p eenhede na regs).

  Die vorm verander nie, wat beteken dat die grafieke kongruent is.
- Laastens moet ons kyk na die **eksponensiële funksie** $y = bx + p + q$:
  - As $p > 0$, skuif die grafiek p eenhede na links (die asimptoot bly dieselfde).
  - As $p < 0$, skuif die grafiek p eenhede na regs (die asimptoot bly dieselfde).

  Die vorm verander nie, wat beteken dat die grafieke kongruent is.

1.2 Teken sketsgrafieke

- Onthou dat, tensy anders aangedui, x en y albei elemente van die stel reële getalle (R) is en die omvang bepaal word deur die y -waarde van die draaipunt.
- As x en y elemente van die stel heelgetalle (Z) is, dan stip ons individuele punte omdat die data diskreet is.
- Om die grafiek van die **parabool** $(y = a(x+p)^2 + q)$ te teken, het ons inligting nodig oor:
  - die vorm
    - As $a > 0$, is die grafiek konkaaf (bene boontoe).
    - As $a < 0$, is die grafiek konveks (bene ondertoe).
  - die simmetrie-as $(x + p = 0 \therefore x = -p)$
  - die draaipunt
  - the *y*-afsnit
  - the *x*-afsnitte (s)
  - q veroorsaak vertikale skuiwe:
    - As $q > 0$, skuif die grafiek q eenhede boontoe.
    - As $q < 0$, skuif die grafiek q eenhede ondertoe.

- Ons kan elke vergelyking van die vorm
  $y = a(x+p)^2 + q$ *to* $y = ax^2 + bx + c$ vereenvoudig.
  Die koördinate van die draaipunt sal $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ wees.
- Om die grafiek van die **hiperbool** $\left(y = \frac{a}{x} + p + q\right)$ te teken, het ons nodig:
  - die horisontale asimptoot: $y = q$
  - die vertikale asimptoot: $x + p = 0 \therefore x = -p$
  - die $y-$ afsnit: laat $x = \mathbf{0}$
  - die x -afsnit: laat $y = \mathbf{0}$.
- Omdat niks oor die gebied van die grafiek aangedui word nie, is dit altyd $x \in R$. Eweneens $y \in R$, en jy moet die beperkings noem. Die gebied en omvang word deur die asimptote beheer, en hierdie waardes moet van hulle uitgesluit word.
- Om die grafiek van die **eksponensiële funksie**
  $(y = a.bx + p + q, \quad b \neq 1, \quad b > 0)$ te teken, het ons nodig:
  - die vorm: $b > 1$ of $0 < b < 1$
  - die horisontale asimptoot: $y = q$
  - die y -afsnit: laat $x = \mathbf{0}$
  - die x -afsnit (net na 'n vertikale skuif en soos gevra word): laat $y = \mathbf{0}$
  - die omvang word bepaal deur die vergelyking van die horisontale asimptoot.

1.3 Bepaal die vergelykings van grafieke

- Wanneer jy gevra word om die vergelyking van 'n gegewe grafiek te bepaal, sal sekere inligting vir jou gegee word wat jou in staat sal stel om maklik by die vergelyking uit te kom.
- Om die vergelyking van 'n **parabool** te bepaal, is daar twee scenario's wat jy in aanmerking moet neem:
  - omdat die draaipunt en een ander punt gegee word, gebruik jy die vorm
    $f(x) = a(x + p)^2 + q$
  - omdat die x -afsnitte en een ander punt gegee word, gebruik jy die vorm
    $y = a(x - x_1)(x - x_2)$
- Onthou, omdat die grafiek deur die oorsprong gaan, lê (0; 0) op die grafiek!
- Om die vergelyking van 'n **hiperbool** te bepaal, het jy net die horisontale en vertikale asimptote en een punt op die grafiek nodig.
- p en q kan onmiddellik vervang word omdat hulle met die vergelykings van die asimptote verband hou.
- Om die vergelyking van die **eksponensiële funksie** te bepaal, sal jy die vergelyking van die horisontale asimptoot en een punt op die grafiek nodig hê, en dit sal gegee

word.

- p en q kan onmiddellik vervang word omdat hulle met die vergelykings van die asimptote verband hou.

1.4 Vertolk grafieke

- Daar is baie inligting wat van 'n grafiek wat geteken is, afgelees kan word.
- Onthou, 'n geordende getallepaar dui die posisie van 'n punt op die Cartesiese vlak aan, asook die afstand van die punt vanaf die asse.
  B(-3; 5) is 3 eenhede van die x -as en 5 eenhede van die y -as. Afstand is nooit negatief nie!

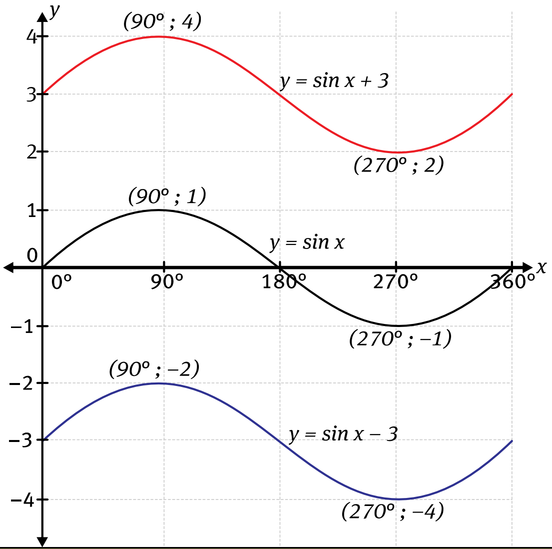
Gemiddelde gradiënt tussen twee punte op 'n kromme

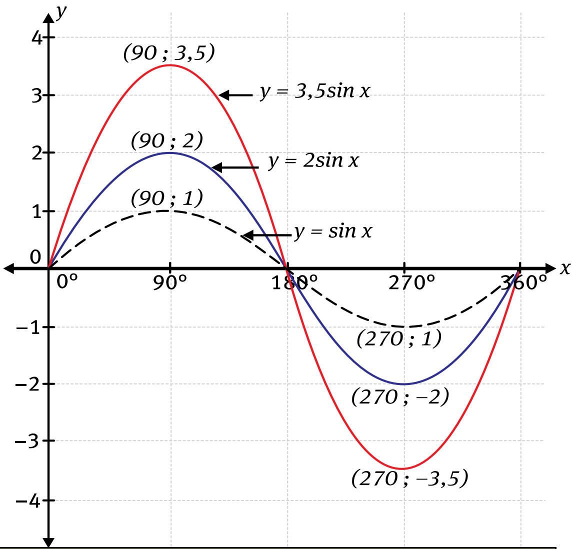
2.1 Gemiddelde gradiënt

- Die gemiddelde gradiënt van 'n kromme tussen enige twee punte is gelyk aan die gradiënt van die reguit lyn wat die twee punte verbind.
- Ons gebruik die formule $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ om die gradiënt van die reguit lyn wat twee punte op 'n kromme verbind, te bereken.

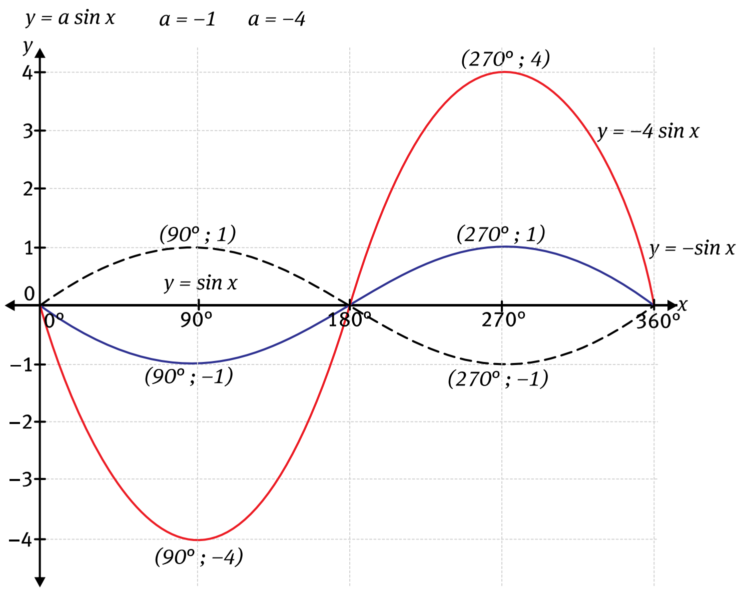
3.1 Hersiening van die basiese grafieke

Die uitwerking van a en q op die grafiek $y = a\sin x + q$ for $x \in [-360°; 360°]$



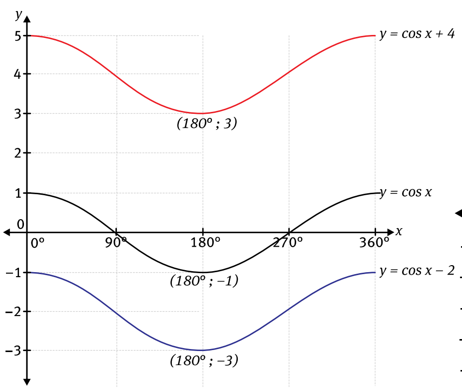


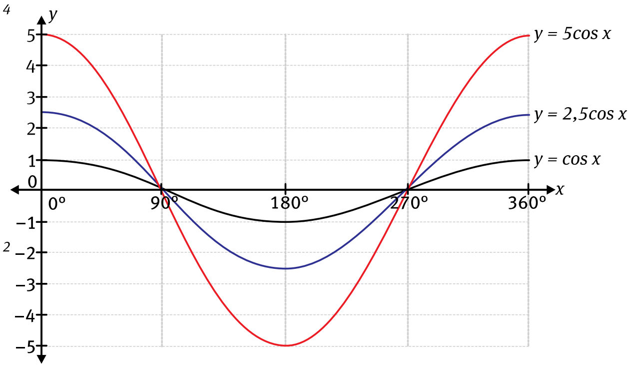
Manipuleer die singrafiek, a > 0	
$q > 0$: die grafiek skuif boontoe. $q < 0$: die grafiek skuif ondertoe. Die vorm verander nie.	$a > 0$: vermenigvuldiging met a veroorsaak 'n vertikale strek van die basiese grafiek. Die vorm van die basiese grafiek verander.
Gebied: $x \in [-360°; 360°]$	**Gebied:** $x \in [-360°; 360°]$
Omvang: $y = \sin x + 3$: $2 \leq y \leq 4$; $[2; 4]$ $y = \sin x$: $-1 \leq y \leq 1$; $[-1; 1]$ $y = \sin x - 3$: $-4 \leq y \leq -2$; $[-4; -2]$	**Omvang:** $y = 3{,}5\sin x$: $-3{,}5 \leq y \leq 3{,}5$; $y \in [-3{,}5; 3{,}5]$ $y = 2\sin x$: $-2 \leq y \leq 2$; $y \in [-2; 2]$ $y = \sin x$: $-1 \leq y \leq 1$; $y \in [-1; 1]$
Amplitude: ((hoogste y — waarde) – (laagste y -waarde))/2 Vir al drie grafieke is dit gelyk aan 1.	**Amplitude:** Die amplitude wissel vir die drie grafieke, bv. vir $y = 3{,}5\sin x$: $\frac{3{,}5 - (-3{,}5)}{2} = 3{,}5$
Periode: 360° vir al drie grafieke	**Periode:** 360° vir al drie grafieke



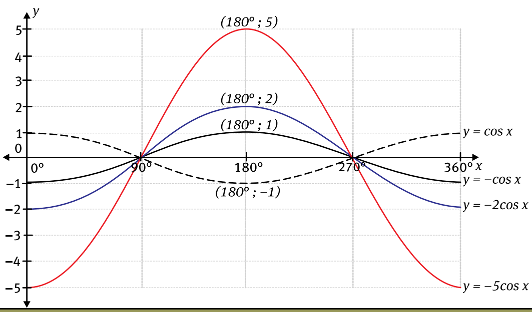
Manipuleer die singrafiek, a < 0
$a < 0$: vermenigvuldiging met negatiewe a veroorsaak 'n refleksie van $y = a\sin x$ in die $x-$ as
Gebied: $x \in [-360°; 360°]$
Omvang: $y = (-1)\sin x$: $-1 \leq y \leq 1$; $y \in [-1; 1]$ $y = (-4)\sin x$: $-4 \leq y \leq 4$; $y \in [-4; 4]$
Amplitude: Die amplitude wissel vir die drie grafieke, bv. vir $y = (-4)\sin x$: $\dfrac{4-(-4)}{2} = 4$
Periode: 360° vir al drie grafieke

Die uitwerking van a en q op die grafiek $y = a\cos x + q$ vir $x \in [-360°; 360°]$





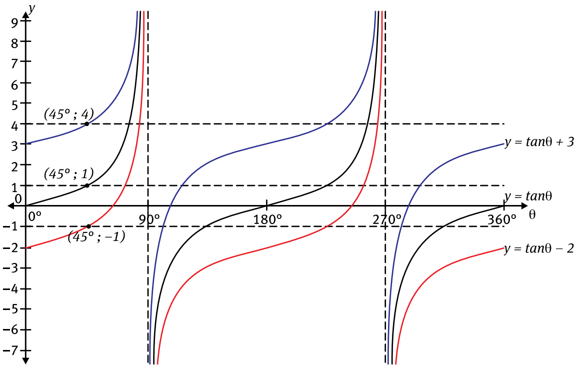
Manipuleer die cosgrafiek, a > 0	
$q > 0$: die grafiek skuif boontoe. $q < 0$: die grafiek skuif ondertoe. Die vorm verander nie.	$a > 0$: vermenigvuldiging met a veroorsaak 'n vertikale strek van die basiese grafiek.
Gebied: $x \in [-360°; 360°]$	**Gebied:** $x \in [-360°; 360°]$
Omvang: $y = \cos x + 4$: $3 \leq y \leq 5$; $[3; 5]$ $y = \cos x$: $-1 \leq y \leq 1$; $[-1; 1]$ $y = \cos x - 2$: $-3 \leq y \leq -1$; $[-3; -1]$	**Omvang:** $y = 5\cos x$: $-5 \leq y \leq$; 5 $y \in [-5; 5]$ $y = 2\cos x$: $-2{,}5 \leq y \leq 2{,}5$; $y \in [-2{,}5; 2{,}5]$ $y = \cos x$: $-1 \leq y \leq 1$; $y \in [-1; 1]$
Amplitude: ((hoogste $y -$ waarde) – (laagste y -waarde)/2 Vir al drie grafieke is dit gelyk aan 1.	**Amplitude:** Die amplitude wissel vir die drie grafieke, bv. vir $y = 5\cos x$: $\frac{5-(-5)}{2} = 5$
Periode: 360° vir al drie grafieke	**Periode:** 360° vir al drie grafieke.

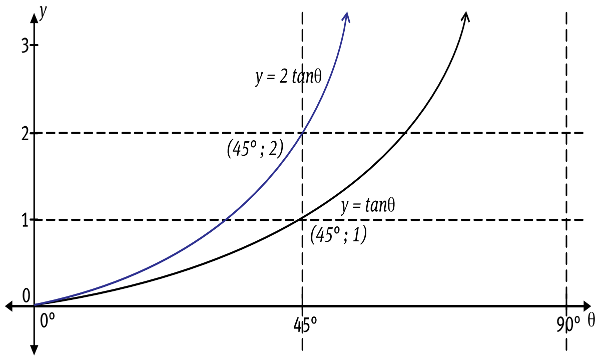


Manipuleer die cosgrafiek, a < 0
$a < 0$: vermenigvuldiging met negatiewe a veroorsaak 'n refleksie van $y = a\cos x$ in die x -as.
Gebied: $x \in [-360°; 360°]$
Omvang: $y = (-5)\cos x$: $-5 \leq y \leq 5$; $y \in [-5; 5]$ $y = -\cos x$: $-1 \leq y \leq 1$; $y \in [-1; 1]$
Amplitude: Die amplitude wissel vir die drie grafieke, bv. vir $y = (-5)\cos x$: $\frac{5-(-5)}{2} = 5$
Periode: 360° vir al drie grafieke.

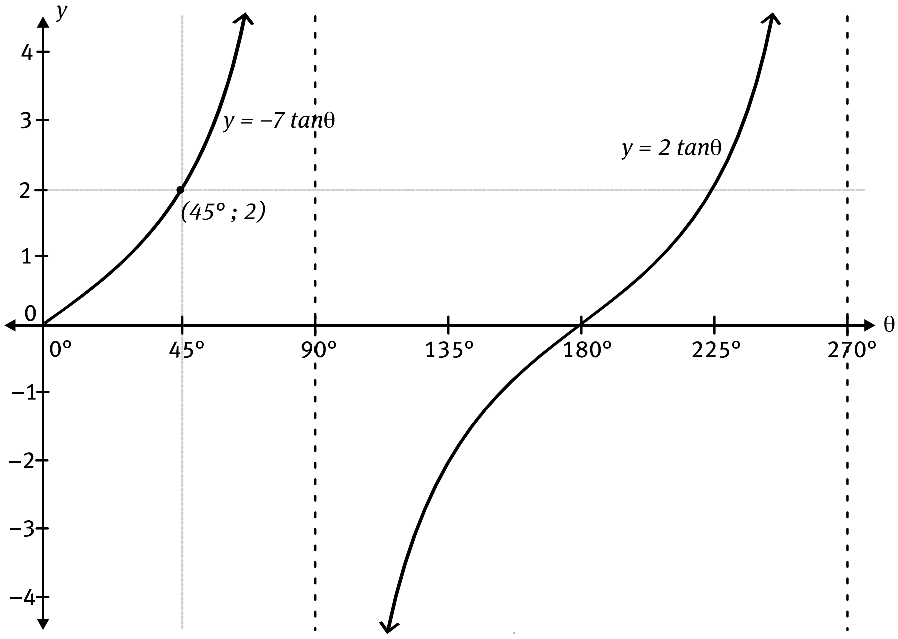
Die uitwerking van a en q op die grafiek $y = a\tan\theta + q$ for $x \in [-360°; 360°]$

Let op: Die horisontale as is nie meer die $x -$ as nie, maar is nou die $\theta -$ as!





Manipuleer die tangrafiek	
Gebied: $x \in [-360°; 360°]$	**Gebied:** $x \in [-90°; 90°]$
Omvang: Ongedefinieerd	**Omvang:** Undefined
Periode: 180°	**Periode:** 180°
Amplitude: Undefined	**Amplitude:** Undefined
Asimptote: -270°, -90°, 90° and 270°	**Asimptote:** -90° and 90°



Manipuleer die tangrafiek
$y = \tan\theta$
Gebied: $x \in [-90°; 270°]$
Omvang: Ongedefinieerd
Periode: 180°
Amplitude: Ongedefinieerd
Asimptote: -90°, 90° and 270°

3.2 Ondersoek die uitwerking van die parameter *p* op die grafiek van $y = \sin(x + p)$

- Die parameter p veroorsaak 'n horisontale skuif van die singrafiek:
  - As $p > 0°$, skuif die grafiek p grade na links.
  - As $p < 0°$, skuif die grafiek p grade na regs.
  - Die periode, amplitude en vorm bly dieselfde.
- Die parameter p veroorsaak 'n horisontale skuif van die cosgrafiek:
  - As $p > 0°$, skuif die grafiek p grade na links.
  - As $p < 0°$, skuif die grafiek p grade na regs.
  - Die periode, amplitude en vorm bly dieselfde.
- Die parameter p veroorsaak 'n horisontale skuif van die tangrafiek:
  - As $p > 0°$, skuif die grafiek p grade na links.
  - As $p < 0°$, skuif die grafiek p grade na regs.
  - Die asimptote skuif na links of regs met $p°$.
  - Die periode bly dieselfde, en die amplitude is ongedefinieerd.

3.3 Sketsgrafieke van trigonometriese funksies wat hoogstens twee van die parameters *a*, *p* en *q* bevat

- Noudat ons weet wat die parameters beteken en watter invloed dit op die trigonometriese grafieke het, is dit maklik om die grafieke van hierdie funksies te teken.

- Onthou om die basiese funksie van die grafiek wat jy probeer teken, liggies met potlood te teken om vir jou te help
- Die basiese grafieke wat ons tot dusver bestudeer het, is:

Basiese trigonometriese grafieke			
Basiese funksies	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \tan x$
q veroorsaak 'n vertikale skuif	$y = \sin x + q$	$y = \cos x + q$	$y = \tan x + q$
a veroorsaak 'n vertikale skuif	$y = a \sin x$	$y = a \cos x$	$y = a \tan x$
k beïnvloed die periode	$y = \sin kx$	$y = \cos kx$	$y = \tan kx$
p veroorsaak 'n horisontale skuif van $p°$ na links $(p > 0)$ of na regs $(p < 0)$	$y = \sin(x + p)$	$y = \cos(x + p)$	$y = \tan(x + p)$

- Wanneer jy gevra word om 'n grafiek te teken wat deur meer as een parameter beïnvloed word, moet jou nie bekommer nie. Doen dit stapsgewys:
  - Begin aan die linkerkant – is daar 'n waarde vir a ? Wat beteken dit?
  - Gaan voort – is daar 'n waarde vir p ? Wat beteken dit?
  - Gaan voort – is daar 'n waarde vir q ? Wat beteken dit?

  Sodra jy antwoorde op al hierdie vrae het, sal jy die grafiek kan teken.

3.4 Vertolk grafieke

- Onthou: Elke geordende getallepaar op die grafiek van 'n trigonometriese funksie dui die grootte van die hoek en die waarde van die trigonometriese verhouding vir daardie spesifieke hoek aan.
- Elke y -waarde dui die afstand van daardie punt na die $x-$ as aan. Afstand is nooit negatief nie!

Vrae

Vraag 1

1.1 Teken sketsgrafieke van die groep funksies hieronder gegee op dieselfde assestel:

$f(x) = x^2$ $\qquad$ $g(x) = -(x - 3)^2$

$h(x) = -(x + 2{,}5)^2$ $\qquad$ $i(x) = (x - 4)^2$

1.2 Skryf die vergelyking van die simmetrie-as van elke grafiek neer.

1.3 Hoe korrespondeer die vergelykings van die simmetrie-asse met die waardes van p in die vergelykings van die funksies $g(x)$, $h(x)$ en $i(x)$?

Vraag 2

Teken sketsgrafieke van die volgende funksies.

Dui vir elke grafiek duidelik die simmetrie-as, die koördinate van die afsnitte met die asse asook dié van die draaipunte aan.

2.1	$y = \frac{1}{3}x^2 - 9$	2.2	$y = \frac{1}{3}(x - 3)^2$
2.3	$y = \frac{1}{3}(x + 7)^2$	2.4	$g(x) = -12x^2 + 30$
2.5	$f(x) = -12(x - 7)^2$	2.6	$h(x) = -12(x + 1)^2$
2.7	$p(x) = 7(x + 3)^2 - 2$	2.8	$k(x) = 7(x - 3)^2 + 2$
2.9	$g(x) = -5(x - 4)^2 - 3$	2.10	$g(x) = -5(x + 3)^2 + 6$

Vraag 3

Gegee $h(x) = x^2 - 5$.

3.1 Bereken:

3.1.1	$h(3)$	3.1.2	$h(x - 3)$
3.1.3	$h(x) - 3$	3.1.4	$h(x - 3) + 7$

3.2 Verduideliki die verskil tussen die grafieke van $h(x)$, $h(x - 3)$ and $h(x) - 3$.

3.3 Bepaal 'n uitdrukking vir $h\left(\frac{2}{x}\right) + h(x + 2) - 5$.

Vraag 4

Skakel die vergelykings van die vorm $y = ax^2 + bx + c$ hieronder egee, om tot vergelykings van die vorm $y = a(x + p)^2 + q$.

Teken sketsgrafieke van elke funksie en dui duidelik die koördinate van die afsnitte met die asse aan, asook die draaipunt van elke grafiek. Skryf die gebied en omvang van elke funksie neer.

4.1 $y = x^2 + 10x + 2$

4.2 $y = x^2 + 15x + 56$

4.3 $f(x) = 2x^2 + 7x - 9$

4.4 $p(x) = -4x^2 + 15x + 3$

Vraag 5

Teken sketsgrafieke van elk van die volgende funksies. Dui die koördinate van die afsnitte met die asse aan, asook die draaipunte.

Skryf die gebied en omvang van elke funksie neer..

5.1 $f(x) = \frac{1}{3}x^2 + 3x - 8$

5.2 $g(x) = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x - 28$

5.3 $y = x^2 + 9x - 7$

5.4 $y = x^2 - 3x - 14$

Vraag 6

Gegee die funksie $f(x) = x^2 - 7$, bepaal die vergelyking van f na elk van die volgende skuiwe. Los jou antwoorde in die vorm $y = ...$

Die grafiek van f word geskuif:

6.1 3 eenhede boontoe

6.2 9 eenhede ondertoe

6.3 4 eenhede na links

6.4 7 eenhede na regs

6.5 1/3 van 'n eenheid boontoe, en 3/4 van 'n eenheid na links

6.6 5 eenhede ondertoe, en 3,5 eenhede na regs

Vraag 7

Teken sketsgrafieke van die gegewe funksies. Dui op elke grafiek die koördinate van die afsnitte met die asse aan, asook die vergelykings van die asimptote.

7.1 $y = \frac{2}{x-3} + 7$

7.2 $y = -\frac{2}{x+2} + 3$

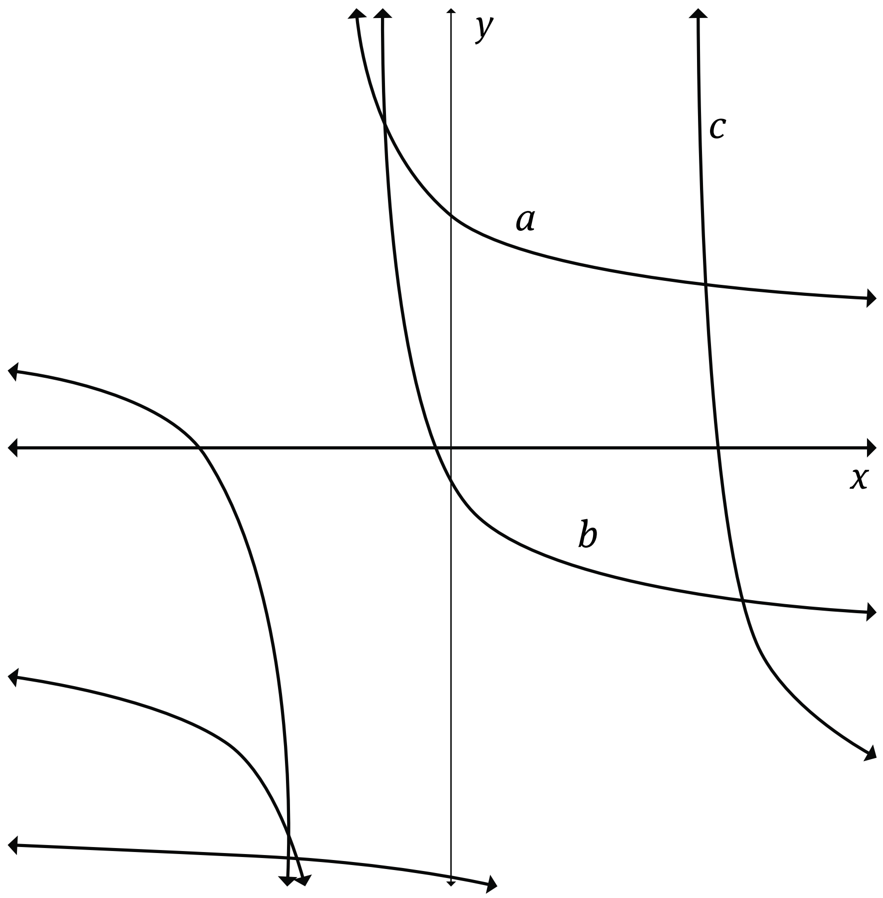
7.3 $y = -\frac{3}{x-3} - 3$

7.4 $y = -5(x+7)^{-1} + 12{,}5$

Vraag 8

Bestudeer die grafieke van $f(x) = \frac{5}{x-5} - 6$, $g(x) = \frac{5}{x+3} + 2$ en $h(x) = \frac{5}{x+2} - 3$.

Pas die grafieke wat a), b) en c) genommer is by enigeen van die funksies f, g of h .



Vraag 9

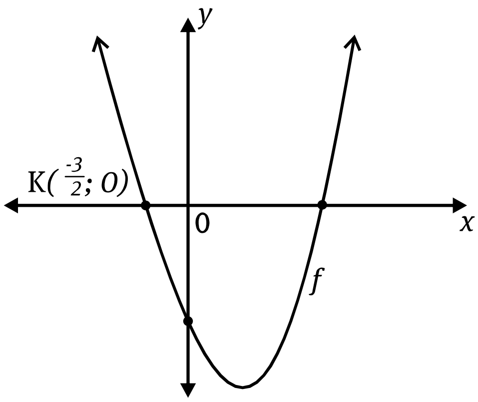
Teken sketsgrafieke van elke groep funksies op dieselfde assestelsel. Dui die koördinate van afsnitte met die asse aan, asook die vergelykings van die horisontale asimptote. Beskryf die translasies wat die basiese grafiek ondergaan het na elke verandering aan die vergelyking.

9.1	$y = -7^x$	$y = -7^x + 4$	$y = -7^{x+3} + 4$	$y = -7^{x-7} + 4$
9.2	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 3$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} - 3$	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^{x-3} - 3$
9.3	$f(x) = 3^{-x}$	$g(x) = 3^{-x} + 5$	$h(x) = 3^{-(x-1)} + 5$	$k(x) = 3^{(-x+1)} + 5$

Vraag 10

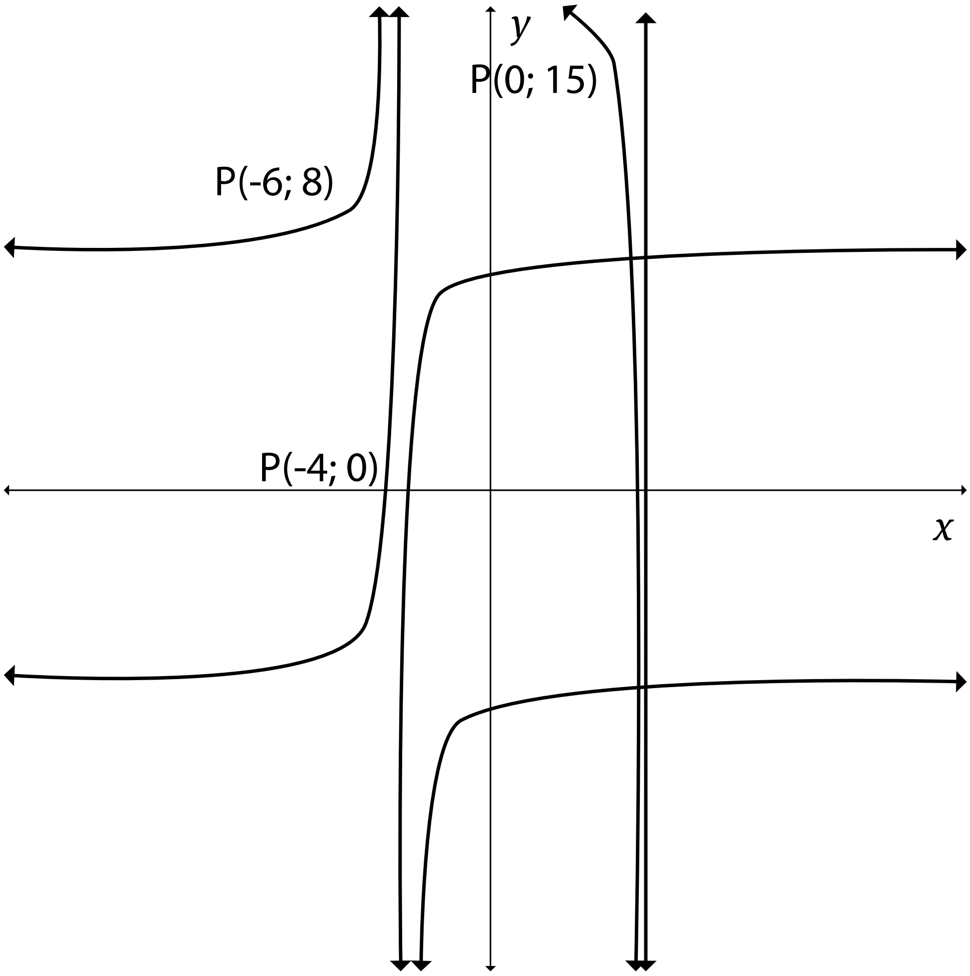
Die grafiek van die funksie $f(x) = (x + p)^2 + q$ is hieronder geteken.

K($-\frac{3}{2}$; 0) is 'n x -afsnit. Bepaal die vergelyking van die parabool.



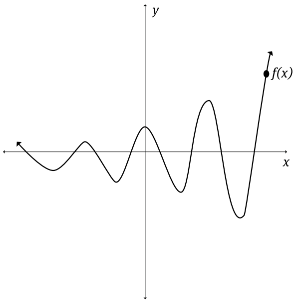
Vraag 11

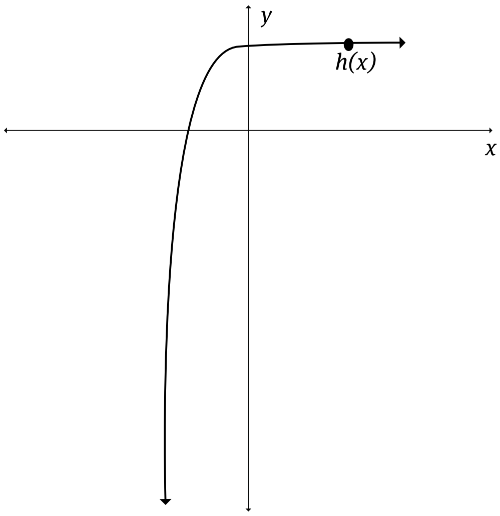
Grafieke van die vorm $h(x) = \frac{a}{x+p} + q$ is hieronder geteken. Die grafieke gaan deur die punte P soos aangedui. Bepaal die vergelykings van die grafieke.

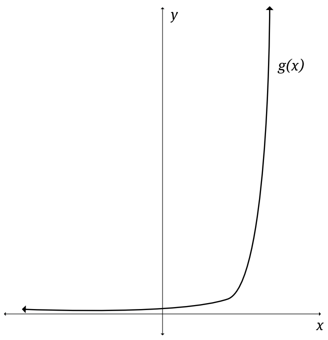


Vraag 12

Grafieke van die vorm $f(x) = b^x$, $g(x) = a.5^{-x}$ en $h(x) = -a^x + q$ is hieronder geteken. Bepaal die vergelyking van elke grafiek.

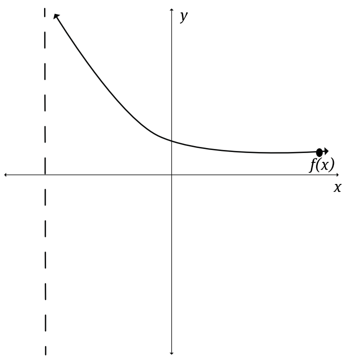


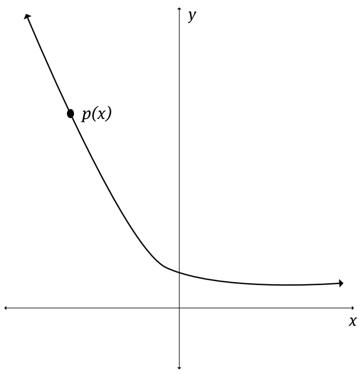




Vraag 13

Gegewe die grafieke van $f(x) = \frac{5}{x} + 3$ en $p(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.





13.1 Bepaal die lengte van KL.

13.2 Bepaal die lengte van KB, waar B die y -afsnit of p is.

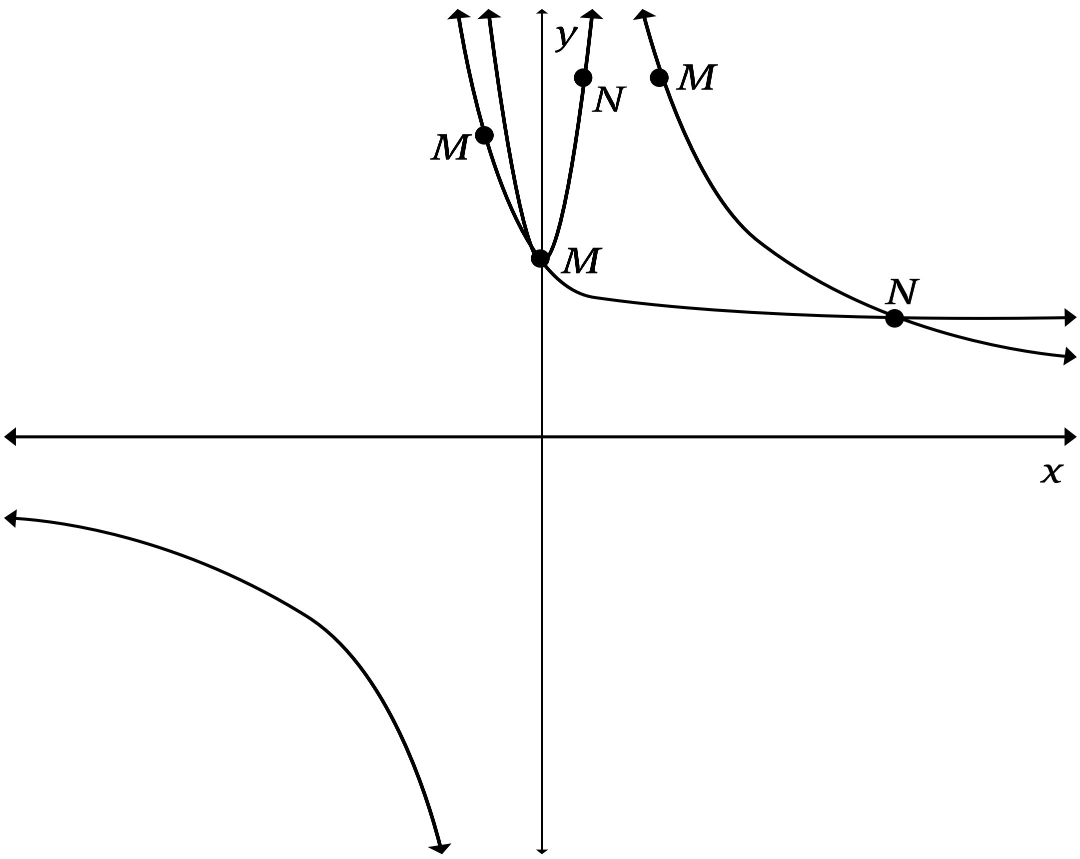
13.3 Vir watter waardes van x , $x > 0$, is $f(x) = p(x)$?

13.4 Vir watter waardes van x , $x > 0$, is $p(x) > f(x)$?

Vraag 14

Bereken die gemiddelde gradiënt tussen M en N op die grafieke van die funksies wat hieronder geteken is:

14.1 $f(x) = 5x^2 + 3$ 14.2 $g(x) = \frac{12,5}{x}$ 14.3 $h(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x + 2$



Vraag 15

'n Skool moet sy saal oorverf, en die Graad 11-klas het aangebied om daarmee te help. Die tabel hieronder dui die aantal ure aan wat verskillende getalle leerders nodig het om die saal te verf:

Getal leerders (x)	1	3	5	10	15
Ure nodig (y)	15	5	3	1,5	1

15.1 Die vergelyking van die funksie wat hierdie verwantskap voorstel, is van die vorm $y = \frac{a}{x}$. Bepaal die waarde van a .

15.2 Teken 'n grafiek van die funksie.

15.3 Hoe sal die grafiek beïnvloed word as die skoolhoof vir 15 ekstra ure voorsiening maak?

15.4 Die gebied van die funksie is beperk. Skryf die beperking neer, en gee 'n rede vir die beperking.

Vraag 16

Teken netjiese sketsgrafieke van die groepe funksies hieronder gegee op dieselfde assestelsel vir die gegewe gebied.Dui die koördinate van die draaipunte (waar toepaslik) aan, asook die afsnitte met die asse. Onthou om die asimptote aan te dui, waar toepaslik.

16.1 $f(\theta) = 3\sin\theta$; $g(x) = -3\sin\theta$; $h(x) = -3\sin\theta - 3$; $0° \leq \theta \leq 360°$

16.2 $f(x) = 5\cos x$; $g(x) = -5\cos x$; $h(x) = -5\sin x + 2$; $-180° \leq \theta \leq 180°$

16.3 $f(x) = \tan x$; $g(x) = \tan x - 3$; $h(x) = \tan x + 5$; $0° \leq \theta \leq 360°$

Vraag 17

Kopieer en voltooi die tabel. Die gebied vir al die grafieke is $0° \leq \theta \leq 360°$.

	Hoogste y-waarde	**Laagste y-waarde**	**Amplitude**	**Omvang**	**Period e**	**Geordende getallepaar by 45°**
$y = 3\sin x + 5$						
$y = \cos x - 5$						
$y = -\tan x - 3$						
$y = -4\cos x + 7$						
$y = \tan x + 5$						
$y = -5\sin x + 2$						

Vraag 18

Teken die grafieke van die gegewe funksies vir die aangeduide gebiede:

18.1 $y = 3\sin x$, $x \in [-180°; 180°]$

18.2 $y = -3\cos x + 4$, $x \in [0°; 180°]$

18.3 $y = 3\tan x - 2$, $x \in [-360°; 360°]$

Vraag 19

Teken die grafieke van die funksies hieronder gegee, vir die gegewe gebied, op afsonderlike asse.

Dui duidelik die koördinate van die afsnitte met die asse aan, asook dié van die draaipunte.

Skryf die periode, amplitude en omvang van elke grafiek neer.

19.1 $g(x) = \sin\left(\frac{1}{3}\right)x$, $x \in [-360°; 360°]$

19.2 $f(x) = \cos 3x$, $x \in [-180°; 180°]$

19.3 $k(x) = -\tan 5x$, $x \in [0°; 360°]$

Vraag 20

Teken die grafieke van die funksies aangedui op afsonderlikie assestelsels. Die gebied vir elke grafiek word gegee.

Waar toepaslik, dui aan die :

- afsnitte met die asse
- koördinate van die draaipunte
- posisie van die asimptoot(tote) met 'n stippellyn.

20.1 $y = \sin(x + 30°)$, $x \in [-30°; 330°]$

20.2 $y = \cos(x - 45°)$, $x \in [-45°; 315°]$

20.3 $y = \tan(x + 60°)$, $x \in [-60°; 300°]$

20.4 $y = \sin(x + 20°)$, $x \in [-160°; 160°]$

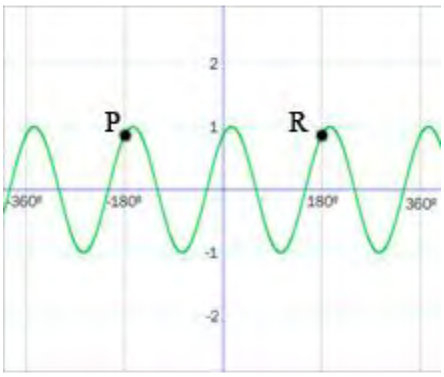
Vraag 21

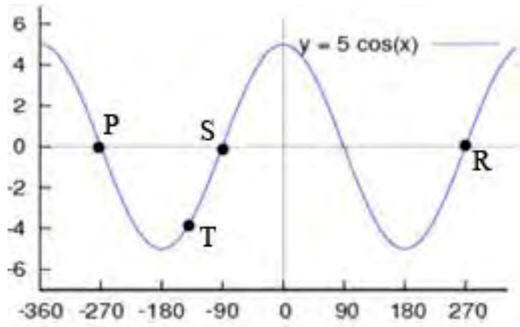
Pas die funksie in kolom A by die korrekte beskrywing in kolom B.

	Kolom A		Kolom B
A	$y = 2\sin 3x$	E	Die grafiek van $y = \sin x$ word boontoe geskuif deur drie eenhede.
B	$y = \sin x + 3$	F	Die grafiek het 'n periode van 180° en word 30° na regs geskuif.
C	$y = \sin 2(x - 30°)$	G	Die amplitude is 2 en die periode 120°.

Vraag 22

Die grafieke van $g(x) = \sin 2(x - 30°)$ en $p(x) = 5\cos x$ vir $x \in [-180°; 90°]$ is hieronder geteken.





22.1 Skryf die omvang van p neer.

22.2 Skryf die koördinate van R neer as die koördinate van P $(-180°;\ 0{,}866)$ en $(-270°;\ 0)$ onderskeidelik is.

22.3 Skryf die periode van $g(2x)$. neer.

22.4 Bepaal die lengte van ST korrek tot vier desimale plekke.

22.5 Vir watter waardes van x is $g(x) = p(x)$?

22.6 Vir watter waardes van x is $g(x) \leq p(x)$?

22.7 Skryf die vergelyking van h neer soos g 45° na regs en 2,5 eenhede ondertoe geskuif word.

Hoofstuk 6

Trigonometrie

Oorsig

Hoofstuk 6 **Bladsy 63** Trigonometrie	**Eenheid 1 Bladsy 64**	
	Trigonometriese identiteite	• Die fundamentele trigonometriese identiteite
	Eenheid 2 Bladsy 65	
	Toepassing van die Trigonometriese identiteite	• Vereenvoudig trigonometriese uitdrukkings • Bewys identiteite
	Eenheid 3 Bladsy 68	
	Reduksieformules	• Trigonometriese verhoudings vanaf $90° - \theta$ • Trigonometriese identiteite vanaf $90° + \theta$ • Toepassing van die reduksieformules • Trigonometriese verhoudings vanaf$180° \pm \theta$ and $360° \pm \theta$
	Eenheid 4 Bladsy 71	
	Negatiewe hoeke	• Toepassing van negatiewe hoeke
	Eenheid 5 Bladsy 72	
	Los trigonometriese vergelykings op	• Gebruik 'n grafiek • Gebruik 'n sakrekenaar • Gebruik spesiale hoeke • Algemene oplossings • Meer gekompliseerde vergelykings

Trigonometrie handel met die verhoudings van die sye en hoeke van driehoeke en met die toepaslike funksies van enige hoeke. In hierdie hoofstuk sal jy verhoudings en spesiale hoeke hersien. Jy sal leer hoe om trigonometriese identiteite te gebruik en toe te pas. Jy sal ook leer oor reduksieformules en hoe om met negatiewe hoeke te werk en jy sal trigonometriese vergelykings oplos.

Trigonometric identiteite

'n Trigonometriese identiteit is 'n uitdrukking wat altyd waar is!

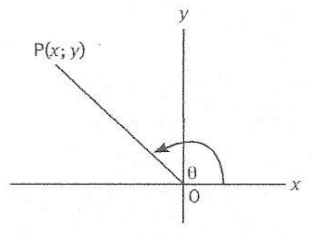
1.1 Die fundamentele trigonometriese identiteite

- **Kwosiënt identiteit:** $\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\vartheta}$

  (Gedefinieer vir alle waardes van θ, behalwe waar $\cos\theta = 0$).

  Bewys:

  Laat $P(x;\ y)$ enige punt op die terminaalstraal θ in die standaardposisie wees.



$\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = (\frac{y}{r})/(\frac{x}{r})$ [lees die verhoudings van die diagram af]

$= \frac{y}{r} \times \frac{r}{x}$ [vereenvoudig die breuk]

$= \frac{y}{x} = \tan\theta$

- **Vierkantsidentiteit:** (ook die Pythagoras identiteit genoem)

  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

  $\sin^2\theta + \cos^2\theta = (\frac{y}{r})^2 + (\frac{x}{r})^2$ [lees die verhoudings van die diagram af]

  $= y^2/r^2 + x^2/r^2$ [kwadreer die terme]

  $= (y^2 + x^2)/r^2$ [tel die breuke bymekaar]

  $= r^2/r^2 = 1$ [pas die stelling van Pythagoras toe]

  Die vierkantsidentiteit kan ook op die volgende maniere uitgedruk word:

  $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

  $\cos^2\theta - 1 = -\sin^2\theta$

  $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$

  - $\sin^2\theta - 1 = -\cos^2\theta$

2.1 Vereenvoudig trigonometriese uitdrukkings

- Om trigonometrie te vereenvoudig gebruik ons die twee fundamentele identiteite (die kwosiënt en vierkantsidentiteite) asook basiese algebra.

Voorbeeld 1

1 Vereenvoudig

$\cos^2\theta . \tan\theta + \tan\theta . \sin^2\theta$

$$\begin{aligned}\cos^2\theta . \tan\theta + \tan\theta . \sin^2\theta &= \tan\theta\,(\cos^2\theta + \sin^2\theta)\\ &= \tan\theta\,(1)\\ &= \tan\theta\end{aligned}$$

2 Vereenvoudig

$(2\tan b . \cos b . \sin b)/(\cos^2 b - 1)$

$$\begin{aligned}(2\tan b . \cos b . \sin b)/(\cos^2 b - 1) &= 2\tan b . \cos b . \sin b/-\sin^2 b\\ &= (2\tan b . \cos b)/(-\sin b)\\ &= -(2(\sin b/\cos b) . \cos b)/(\sin b)\\ &= (-2\sin b)/(\sin b)\\ &= -2\end{aligned}$$

2.2 Bewys identiteite

- Daar is baie meer identiteite as die twee fundamentele identiteite wat ons tot dusvêr bespreek het.
- ‘n Identiteit kan bewys word deur te bewys dat die uitdrukking aan die linkerkant (LK) gelyk is aan die uitdrukking aan die regterkant (RK) en deur die fundamentele identiteite en basiese algebra te gebruik.
- Daar is ook ander maniere waarop identiteite bewys kan word. Hulle is:

Vereenvoudig een kant om gelyk te wees aan die ander kant

Bewys die identiteit:

$\tan a + \cos a/(1 + \sin a) = 1/\cos a$

LK $= \tan a + \cos a/(1 + \sin a)$
$= \sin a/\cos a + \cos a/(1 + \sin a)$
$= (\sin a(1 + \sin a) + \cos^2 a)/\cos a(1 + \sin a)$
$= (\sin a + \sin^2 a + \cos^2 a)/\cos a(1 + \sin a)$
$= (\sin a + 1)/\cos a(1 + \sin a)$
$= 1/\cos a$
= RK

Vereenvoudig albei kante totdat hulle gelyk is

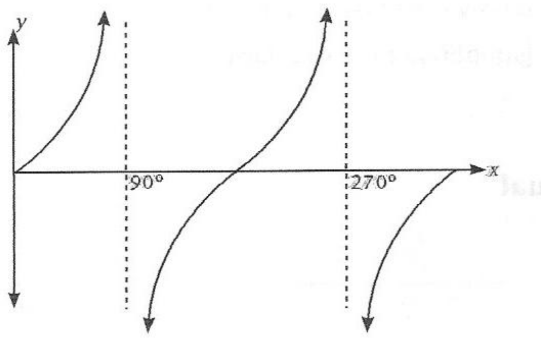
Bewys dat

$\sin^2 y - (\cos^2 y)/(\sin y \cos y + \cos 2y) = \tan y - 1$

LK $= (\sin^2 y - \cos^2 y)/(\sin y \cos y + \cos 2y)$
$= ((\sin y - \cos y)(\sin y + \cos y))/(\cos y(\sin y + \cos y))$
$= (\sin y - \cos y)/\cos y$
RK $= \tan y - 1$
$= \sin y/\cos y - 1$
$= (\sin y - \cos y)/\cos y$
$\therefore$ LK = RK

- Trigonometriese vehoudings is nie altyd waar vir al die waardes van die veranderlikes nie. Die uitsonderings is wanneer die identiteit ‘n raaklynfunksie bevat, of wanneer daar ‘n breuk met ‘n trigonometriese funksie in die noemer is.

Identiteite wat raaklynfunksies bevat



- Die funksie y = tan x is ongedefinieërd by die interval $[0°;\ 360°]$ vir $x = 90°$ of $270°$.

Bewys dat: $\tan^2 k.\cos^2 k = \sin^2 k$
LK $= \tan^2 k.\cos^2 k = (\sin^2 k/\cos^2 k).\cos^2 k = \sin^2 k =$RK.

Die identiteit is ongedefinieerd vir $k = 90°$ of $270°$.

Identiteite met trigonometriese funksies in die noemer

Wanneer identiteite trigonometriese funksies in die noemer het, moet jy onthou dat die noemer nooit gelyk kan wees aan nul nie. Dit beteken dat die identiteit vir alle waardes van die veranderlike, waarvoor die trigonometriese funksie gelyk is aan nul, ongeldig is.

Bewys dat:

$(1 - \sin^3 p)/(1 - \sin p) = 1 + \sin p + \sin^2 p$

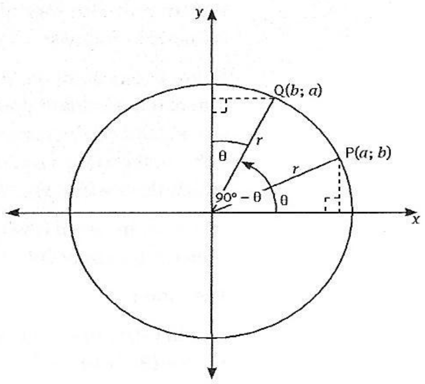
LK $= (1 - \sin^3 p)/(1 - \sin p)$
$= ((1 - \sin p)(1 + \sin p + \sin^2 p))/(1 - \sin p)$
$= 1 + \sin p + \sin^2 p$
$=$ RK.

Die identiteit is ongedefinieerd wanneer
$1 - \sin p = 0$
$\therefore$Dit is ongedefinieerd wanneer
$\sin p = 1$.

Reduksieformules

Hier lei ons formules af vir die trigonometriese verhoudings van $90° - \theta$ en $90° + \theta$. Gestel θ is 'n skerphoek. Wat ons wil bewys is dat daar 'n verwantskap is tussen die trigonometriese verhoudings van θ en die van $90° - \theta$ of $90° + \theta$ of $180° - \theta$ of $180° + \theta$ of $360° - \theta$ of $360° + \theta$ is. Jy moet die formele bewyse en die formules bestudeer.

3.1 Trigonometriese verhoudings van 90° – *θ*



As P(*a*; *b*) 'n punt is op die terminaalarm van θ in standaardposisie, en Q is 'n punt op die terminaalarm van $90° - \theta$, dan is Q 'n refleksie van P rondom die lyn $y = x$. Dus, sal die koördinate van Q (*b*; *a*) wees en die lengte van oP = oQ = *r*.

Dus: $\sin(90° - \theta) = a/r = \cos\theta$

$\cos(90° - \theta) = b/r = \sin\theta$

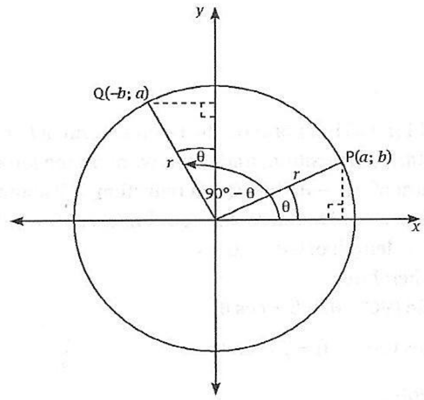
Onthou: $y = \sin x$ en $y = \cos x$ is ko-funksies.

Hoeke θ en $90° - \theta$ tel op na $90°$ en is komplementêre hoeke.

Die funksiewaardes van $90° - \theta$ is gelyk aan die ko-funksie waardes van θ.

3.2 Trigonometriese verhoudings van 90° + *θ*

As P(*a*; *b*) 'n punt op die terminaalarm van θ in die standaardposisie is en Q 'n punt is op die terminaalarm van $90° + \theta$, dan is Q 'n rotasie van P, 90° antikloksgewys deur die oorsprong. Dus sal die koördinate van Q (–*b*; *a*) wees en die lengte van oP = oQ = *r*.



Dus: $\sin(90° + \theta) = a/r = \cos\theta$

$\cos(90° + \theta) = b/r = -\sin\theta$

3.3 Pas die reduksieformules toe

Voorbeeld 2

1 Druk $\sin 54°$, $\cos 126°$ en $\cos 54°$ as trigonometriese verhoudings van $36°$ uit.

$\sin 54° = \sin(90° - 36°) = \cos 36°$

$\cos 126° = \cos(90° + 36°) = -\sin 36°$

$\cos 54° = \cos(90° - 36°) = \sin 36°$

2 Vereenvoudig: $\sin(90° - \theta).\cos(90° + \theta).\tan\theta + \tan 225°$

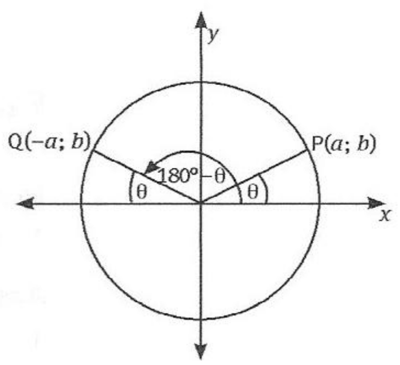
$$\begin{aligned}\sin(90° - \theta).\cos(90° + \theta).\tan\theta + \tan 225° &= \cos\theta.(-\sin\theta).(\sin\theta/\cos\theta) + 1\\ &= -(\sin^2\theta.\cos\theta/\cos\theta) + 1\\ &= -\sin^2\theta + 1\\ &= -(\sin^2\theta - 1)\\ &= -\cos^2\theta\end{aligned}$$

3 Bereken sonder om ‘n sakrekenaar te gebruik: $\sin 68°/\cos 22°$

$$\begin{aligned}\sin 68°/\cos 22° &= \sin(90° - 22°)/\cos 22°\\ &= \cos 22°/\cos 22°\\ &= 1\end{aligned}$$

3.4 Trigonometriese verhoudings van $180° \pm \theta$ en $360° \pm \theta$

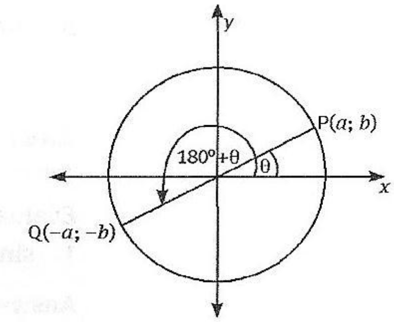
- Trigonometriese verhoudings van $180° - \theta$



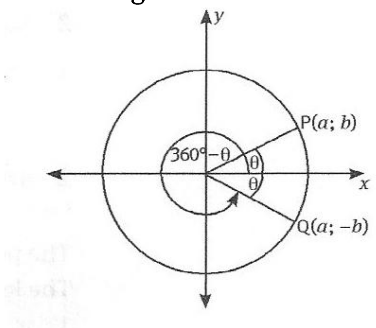
As P(a; b) ‘n punt op die terminaalarm van θ in die standaardposisie is en Q is’n punt op die terminaalarm van $180° - \theta$, dan is Q ‘n refleksie van P rondom die y-as (die lyn $x = 0$).Die koördinate van Q sal dus ($-a$; b)wees. Die lengte van oP = oQ = r.

Dus: $\sin(180° - \theta) = b/r = \sin\theta$
$\cos(180° - \theta) = -a/r = -\cos\theta$
$\tan(180° - \theta) = b/-a = -\tan$

- Trigonometriese verhoudings van $180° + \theta$
  As P(a; b)'n punt op die terminaalarm
  van θ in die standaardposisie is en Q is 'n punt op die termi
  van $180° + \theta$,dan is Q die rotasie van P,
  180° deur die oorsprong. Die koördinate
  van Q sal dus (a; $-b$)wees.
  Die lengte van oP = oQ = r.
  Dus: $\sin(180° + \theta) = -b/r = -\sin\theta$
  $\cos(180° + \theta) = -a/r = -\cos\theta$
  $\tan(180° + \theta) = -b/a = \tan\theta$



- Trigonometriese verhoudings van$360° - \theta$



As P(a; b) 'n punt op die terminaalarm van θ in die standaardposisie is en Q is'n punt op die terminaalarm van $360° - \theta$, dan is Q 'n rotasie van P, 180°deur die oorsprong. Die koördinate van Q sal dus($-a$; $-b$)wees. Die lengte van oP = oQ = r.
Dus: $\sin(360° - \theta) = -b/r = -\sin\theta$
$\cos(360° - \theta) = a/r = \cos\theta$
$\tan(360° - \theta) = -b/a = -\tan\theta$

- Trigonometriese verhoudings van $360° + \theta$
  As 'n punt P(a; b) op die terminaalarm
  van θ in die standaardposisie deur 360°
  deur die oorsprong geroteer word, dan sal
  die gevolglike punt op die terminaalarm van
  $360° + \theta$ saamval met P(a; b) op die terminaal
  van θ in die standaardposisie.
  Die lengte van OP = r.
  Dus: $\sin(360° + \theta) = b/r = \sin\theta$
  $\cos(360° + \theta) = a/r = \cos\theta$
  $\tan(360° + \theta) = b/a = \tan\theta$

Hier volg 'n opsomming van die reduksieformules:

Reduksieformules			
$180° - \theta$	**$180° + \theta$**	**$360° - \theta$**	**$360° + \theta$**
$\sin(180° - \theta) = \sin\theta$	$\sin(180° + \theta) = -\sin\theta$	$\sin(360° - \theta) = -\sin\theta$	$\sin(360° + \theta) = \sin\theta$
$\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$	$\cos(180° + \theta) = -\cos\theta$	$\cos(360° - \theta) = \cos\theta$	$\cos(360° + \theta) = \cos\theta$
$\tan(180° - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(180° + \theta) = \tan\theta$	$\tan(360° - \theta) = -\tan\theta$	$\tan(360° + \theta) = \tan\theta$

Negatiewe hoeke

In trigonometrie meet ons hoeke op ‘n Kartesiaanse vlak vanaf die positiewe *x*-as.

Positiewe hoeke word antikloksgewys vanaf hierdie as gemeet en negatiewe hoeke word kloksgewys gemeet.

4.1 Pas negatiewe hoeke toe

Voorbeeld 3

1 Druk die volgende as trigonometriese verhoudings van θ uit:

1.1 $\cos(-\theta) = \cos\theta$

1.2 $\tan(\theta - 180°) = \tan[-(180° - \theta)]$

$= -\tan(180° - \theta)$

$= -(-\tan\theta)$

$= \tan\theta$

1.3 $\cos(180° - \theta) = -\cos\theta$

2 Bereken sonder om ‘n sakrekenaar te gebruik

2.1 $\sin(-90°) = -\sin 90° = -1$

2.2 $\cos(-120°) = \cos(120°)$

$= \cos(90° + 30°)$

$= -\sin 30°$

$= -\frac{1}{2}$

2.3 $\sin(-x)\cos(90° - x) - \cos^2 x = -\sin x.\sin x - \cos^2 x$

$= -(\sin^2 x + cos^2 x)$

$= -1$

Los trigonometriese vergelykings op

Ons kan trigonometriese vergelykings oplos deur 'n grafiek, 'n sakrekenaar of spesiale hoeke te gebruik.

5.1 Gebruik 'n grafiek

- Wanneer jy 'n grafiek ontvang en gevra word om die trigonometriese vergelyking op te los,is die oplossing eenvoudig – lees die waarde van die grafiek af!
- Dis belangrik om te onthou dat die vergelyking meer as een oplossing op die gegewe interval kan hê, dus, let hiervoor op.

5.2 Gebruik 'n sakrekenaar

- As jy 'n trigonometriese vergelyking ontvang, bv. $\tan x = -2{,}5$, is dit belangrik om eers te identifiseer in watter kwadrant(e) die vergelyking sal afspeel.
- Sodra jy die kwadrant(e) het, bereken die waarde van die veranderlike en pas dit toe op die trigonometriese verhouding(s) wat in daardie kwadrant(e) geld.

5.3 Gebruik spesiale hoeke

- As jy 'n trigonometriese vergelyking met 'n verwysingshoek kry, vind die teken van die RK van die vergelyking. Bepaal hieruit in watter kwadrante die vergelyking waar sal wees (m.a.w.in watter kwadrante daar oplossings sal wees).
- Gebruik nou die verwysingshoek en die kwadrante waarin die oplossings is en bereken die waarde(s) van die veranderlike.

5.4 Algemene oplossings

- Die sinus verhouding
  Die algemene oplossing vir $\sin\alpha = 0{,}5$ is
  $\theta = 90° + k.360°$ of $\theta = 270° + k.360°,\ k \epsilon Z.$
- Die kosinus verhouding
  Die algemene oplossing vir $\cos\alpha = -\sqrt{3/2}$ is
  $\theta = 120° + k.360°$ of $\theta = 240° + k.360°,\ k \epsilon Z.$
- Die tan verhouding
  Die algemene oplossing vir $\tan\alpha = 1$ is
  $\alpha = 45° + k.180°,\ k \epsilon Z.$

5.5 Meer gekompliseerde vergelykings

- Vergelykings met die vorm $\sin\alpha = \pm\sin\beta$, $\cos\alpha = \pm\cos\beta$ en $\tan\alpha = \pm\tan\beta$. Die volgende verwantskap tussen α en β is waar en kan gebruik word om hierdie vergelykings op te los:
  - $\tan\alpha = -\tan\alpha$
  - $\sin\alpha = \sin\beta$
  - $\sin\alpha = -\sin\beta$
  - $\cos\alpha = \cos\beta$
  - $\cos\alpha = -\cos\beta$
- Vergelykings met die vorm $a\sin x = b\cos x$.
  - Onthou, hierdie vergelyking kan na 'n eenvoudige vergelyking verander word deur aan albei kante met $a\cos x$ te deel. Die vergelyking word $\tan x = b/a$.
- Vergelykings met die vorm $\sin A = \pm\cos B$.
  - Gebruik die ko-funksie reduksieformule om die vergelyking in die vorm $\sin A = \sin(90° \pm B)$ of $\cos(90° \pm A) = \pm\cos B$ oor te skryf.
  - Nou is dit maklik om die vergelyking op te los deur gebruik te maak van dieselfde metode wat ons gebruik het vir vergelykings met die vorm $\sin a = \sin\beta$ en $\cos a = \cos\beta$.
- Kwadratiese vergelykings word opgelos deur algebraïese vaardighede te gebruik om die kwadratiese vergelyking in twee eerste graadse vergelykings te faktoriseer, wat jy dan maklik kan oplos!

Voorbeeld 4

Los op vir x, $x \in [0°;\ 360°]$ as $\tan x = -5{,}32$

Die waarde van $\tan x = -5{,}32$ impliseer dat $\tan x$ negatief is. Dus lê die oplossings in die tweede en vierde kwadrante. Onthou dat die hoeke in die tweede en derde kwadrante die vorm $180° - \theta$ of $360° + \theta$ het. Om die skerp hoek, θ,te kry, bereken ons $\tan^{-1} - 5{,}32$, wat gelyk is aan $-79{,}35°$.

$\tan x = -5{,}32$, $\therefore\ x = -79{,}35°$

- Vergelykings wat $\tan x$ sowel as $\sin x$ en $\cos x$ bevat.
  - Druk $\tan x$ uit in terme van $\sin x$ en $\cos x$ deur die kwosiënt identiteit $\tan x = \sin x/\cos x$ te gebruik.

Voorbeeld 5

Bepaal die algemene oplossing vir $2\cos x + 3\tan x + 1 = -6\sin x$.

$2\cos x + 3\tan x + 1 = -6\sin x$

$2\cos x + 3\,(\sin x/\cos x) + 1 = -6\sin x$

$\therefore\ 2\cos^2 x + 3\sin x + \cos x = -6\sin x\cos x$

$\therefore\ 2\cos^2 x + \cos x + 6\sin x\cos x + 3\sin x = 0$

$\therefore\ \cos x(2\cos x + 1) + 3\sin x(2\cos x + 1) = 0$

$\therefore\ (2\cos x + 1)(\cos x + 3\sin x) = 0$

$\therefore \cos x = 1/2$ of $\cos x = 3\sin x$

$\cos x/3\cos x = 3\sin x/3\cos x$

$\frac{1}{3} = \tan x$

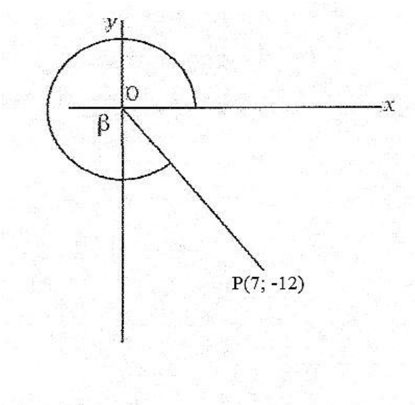
$\therefore\ x = 60° + 360°n$ of $360° - 60° + 360°n$

$\therefore\ x = 60° + 360°n$ of $300° + 360°n$

$\therefore\ x = 18{,}4° + 180°n$

Vrae

Vraag 1



Die punt P(7; -12) lê op die terminaalstraal van β in die standaardposisie.

1.1 Bepaal:

1.1.1 die lengte van OP

1.1.2 $\sin\beta$

1.1.3 $\cos\beta$

1.1.4 $\sin\beta/\cos\beta$

1.1.5 $\tan\beta$

1.2 Gebruik jou antwoorde in 1.1.1 to 1.1.5 hierbo om veronderstellings te maak oor die waardes van $\tan\beta$, $\cos\beta$ en $\sin\beta$.

1.3 Bereken $\sin^2\beta + \cos^2\beta$.

Vraag 2

Gebruik fundamentele identiteite om te vereenvoudig:

2.1 $\sqrt{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$

2.2 $\sin x(\sin x + \tan x.\cos x)$

2.3 $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

2.4 $\cos^2 y + (\sin^2 y.\tan y/\cos y)$

Vraag 3

Bepaal die waardes vir x, $x \epsilon [0°; 360°]$,waarvoor die identiteit ongedefinieerd is.

Bewys die identiteite.

3.1 $\cos t = 1/\cos t - \sin^2 t/\cos t$

3.2 $\sin^2 b - 2 = -\cos^2 b(\tan^2 b + 2)$

3.3 $\tan^2 ß = \sin^2 ß(1 + \tan^2 ß)$

3.4 $\tan x - \sin x.\cos x = \sin^2 x.\tan x$

3.5 $\sin x - 1/\sin x = -\cos^2 x/\sin x$

3.6 $(\sin^3 x - \cos^3 x)/(1 + \sin x \cos x) = \sin x - \cos x$

Vraag 4

4.1 Druk elk van die volgende as 'n funksie van $42°$ uit:

4.1.1 $\cos 222°$

4.1.2 $\sin 48°$

4.2 Druk elk van die volgende as 'n funksie van $75°$ uit:

4.2.1 $\sin 435°$

4.2.2 $\cos 285°$

Vraag 5

As $\sin 88° = t$, druk die volgende in terme van t uit. Gebruik 'n skets.

5.1 $\cos 2°$

5.2 $\tan 178°$

5.3 $\cos 92°$

Vraag 6

Druk elk van die volgende as 'n trigonometriese verhouding van θ uit:

6.1 $\tan (360° + \theta)$

6.2 $\cos (90° - \theta)$

6.3 $\sin (360° - \theta)$

6.4 $\tan (360° - \theta)$

Vraag 7

Bereken sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

7.1 $\sin 150°$

7.2 $\cos 300°$

7.3 $\tan 390°$

7.4 $\cos 210° + \sin 120°$

7.5 $\sin(90° - x).\cos(180° + x).\tan(180° + x)/\cos(90° - x).\cos(360° - x).\tan x$

7.6 $\sin(-\theta)$

7.7 $\cos(-360° - \theta)$

Vraag 8

Bewys: $\cos x - \cos x.\tan(-x) = \cos(-x) - \sin(x - 180°)$.

Vraag 9

Bepaal die algemene oplossings vir die volgende vergelykings.

Gee jou antwoord korrek tot een desimale syfer.

9.1 $\sin x = -3{,}125$

9.2 $\cos x - 0{,}986 = 0$

9.3 $3\tan x = 2{,}12$

9.4 $\tan x = \sin 35°$

9.5 $2\cos x + 1 = 0$

9.6 $\tan 4x = \tan 90°$

9.7 $2\tan x.\cos^2 x = \cos x$

9.8 $\sin(5x + 30°) = \sin x$

9.9 $\tan(3x - 20°) = \tan(x + 40°)$

9.10 $3\sin x = -5\cos x$

9.11 $\frac{5}{9}\cos x = -\sin x$

9.12 $\cos(x - 20°) = -\sin(x + 30°)$

9.13 $\cos(3x + 20°) = -\sin(x - 60°)$

9.14 $\sin^2 A - 2\sin A.\cos A = 2\cos^2 A$

9.15 $3\tan x = 2\sin x$

9.16 $-3 - \tan x = -\cos x/\sin x$

Oorsig

Hoofstuk 7 Bladsy 77 Meting	Eenheid 1 Bladsy 78 Gekombineerde voorwerpe

Oppervlakte en volume kan in baie verskillende situasies gebruik word om ons te help om tyd te bespaar, geld te bespaar en die omgewing te bewaar.

Geisers gebruik baie energie om water vir huishoudelike gebruik te verhit. Deur gebruik te maak van berekeninge wat die volume water wat deur huishoudings gebruik word, betrek, kan die optimale geisergrootte, wat sal verseker dat geen onnodige energie vermors word om groot hoeveelhede water te verhit, geïnstalleer word.

Om die binnemure van 'n huis te verf, bereken ons die oppervlakte in m^2 en koop presies genoeg verf aan om die mure te verf.

As ons 'n houtkrat wil bou,moet ons vooraf besluit wat die volume moet wees. Sodoende kan ons die optimale hoeveelheid hout, wat benodig word, uitwerk, sodat ons die korrekte groottes kan aankoop en so min as moontlik kan vermors.

Gekombineerde voorwerpe

Kom ons hersien enkele van die definisies en formules wat gebruik word om die oppervlakte en volume van driedimensionele (3D) voorwerpe te bereken:

- 'n Regte prisma is 'n veelvlak met twee identiese en parallelle aansigte, of basisse. Die ander aansigte is reghoeke en is loodreg op die basisse.
- 'n Regte silinder is 'n 3D voorwerp met twee ronde basisvlakke parallel aan mekaar. Daar is 'n geboë oppervlak tussen die twee basisse.
- Die oppervlakte van 'n regte prisma en 'n regte silinder word verkry deur $\text{S} = 2(\text{Oppervlakte van basis}) + \text{omtrek van basis} \times \text{hoogte van prisma (silinder)}$
- Die volume van 'n regte prisma en regte silinder word verkry deur: $\text{V} = \text{Oppervlakte van basis} \times \text{hoogte van prisma (silinder)}$

Prismas

- Wanneer een dimensie van 'n prisma vermenigvuldig word met 'n faktor, k, verander die volume van die prisma met dieselfde faktor.
- Wanneer twee dimensies van 'n prisma met 'n faktor, k, vermenigvuldig word, verander die volume van die prisma met 'n faktor van k^2.
- Wanneer drie dimensies van 'n prisma met 'n faktor, k, vermenigvuldig word, verander die oppervlakte met 'n faktor van k^2 en die volume verander met 'n faktor van k^3.

Silinders

- Wanneer die radius en hoogte van 'n silinder vermenigvuldig word met 'n faktor,k, verander die oppervlakte van 'n silinder met 'n faktor van k^2.
- Wanneer ons die hoogte van 'n silinder met 'n faktor, k, vermenigvuldig, verander die volume van die silinder met 'n faktor van k.
- Wanneer die radius of deursnee van 'n silinder vermenigvuldig word met 'n faktor, k, verander die volume van die silinder met 'n faktor van k^2.
- Wanneer sowel die radius (of deursnee) en die hoogte van 'n silinder vermenigvuldig word met 'n faktor, k, verander die volume van die silinder met 'n faktor van k^3.

Sfeer (*r* = radius, *d* = deursnee (= 2*r*))

- Omtrek van 'n sfeer: $C = 2\pi r = \pi d$
- Oppervlakte van 'n sfeer: $S = 4\pi r^2 = \pi d^2$
- Volume van 'n sfeer: $V = \frac{4}{3}\pi r^3 = \pi d^3/6$

Keëls (r = radius of ronde basis, h = hoogte van keël, s = skuinshoogte van keël)

- Skuinshoogte van keël: $s = \sqrt{h^2 + r^2}$
- Omtrek van die basis: $C = 2\pi r = \pi d$
- Oppervlakte van 'n keël: $S = \pi r^2 + \pi rs$
- Volume van 'n keël: $V = 1/3\, \pi r^2 h$

Piramides (h = hoogte van piramide, s = skuinshoogte van piramide)

- oppervlakte van 'n piramide: $S = \text{opv. van basis} + 1/2\ (\text{omtrek van basis})s$
- Volume van 'n piramide: $V = 1/3\ (\text{opv. van basis})h$

Vrae

Vraag 1

1.1 Bereken korrek tot drie desimale plekke die oppervlakte en volume van 'n sfeer met radius 12 mm.

1.2 Bereken die radius en volume van 'n sfeer met 'n oppervlakte van 512,157 m^2.

Vraag 2

Die radius van die basis van 'n regte, ronde keël is 13,5 cm en die hoogte van die keël is 51,2 cm. Bepaal, korrek tot drie desimale plekke:

2.1 die skuinshoogte van die keël

2.2 die totale oppervlakte van die keël

2.3 die volume van die keël.

Vraag 3

‘n Toring bestaan uit die volgende dele:

‘n Regte piramide staan bo-op ‘n vierkantige regte prisma.

Die basis van die toring is 2,5 m by 2,5 m.

Die totale hoogte van die gebou is 50 m.

As die piramide 23 m hoog is, bereken die buite-oppervlakte van die toring, korrek tot die naaste vierkante meter.

Vraag 4

‘n Blompot bestaan uit ‘n halfrond onder, met ‘n regte silinder bo-op dit. Die radius van die halfrond is 13 cm en die hoogte van die silinder is 31 cm. Bereken die oppervlakte en volume van die blompot korrek tot twee desimale plekke, indien nodig.

Dink jy hierdie is ‘n praktiese ontwerp? Waarom dink jy so?

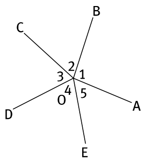
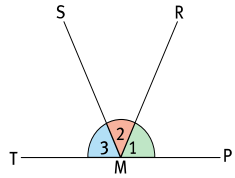
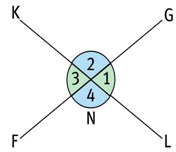
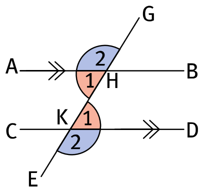
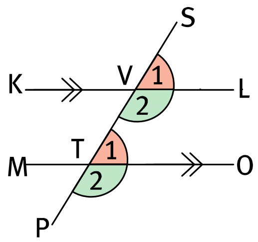
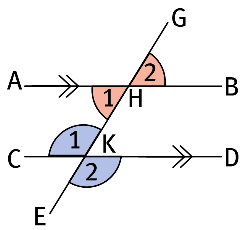
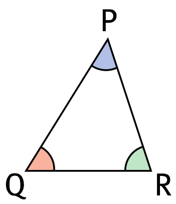
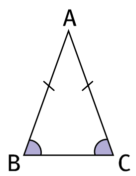
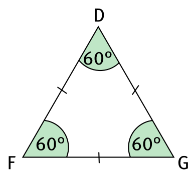
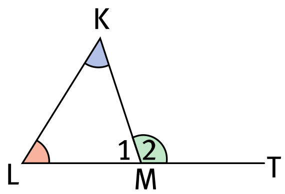
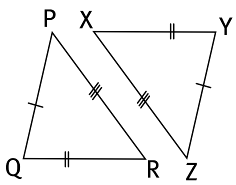
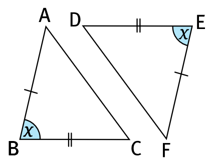
Oorsig

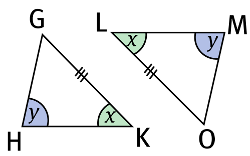
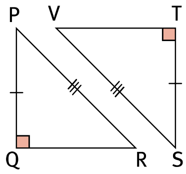
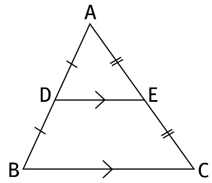
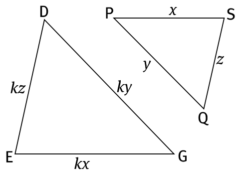
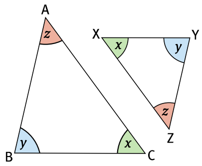
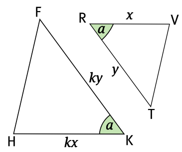
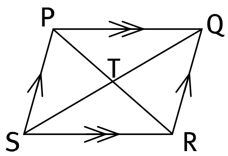
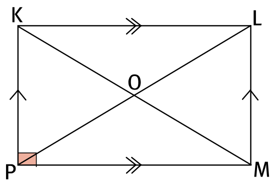
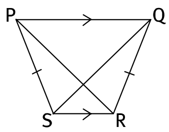
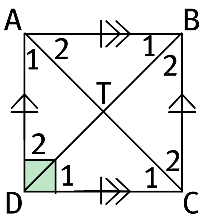
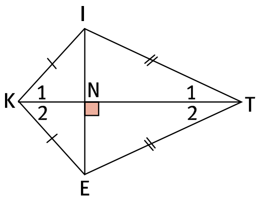
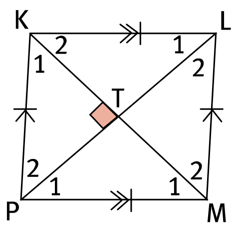
Hoofstuk 8 Bladsy 81 Euklidiese Meetkunde	Graad 10 Hersiening Bladsy 82	
	Eenheid 1 Bladsy 84 Sirkels	• Sirkelstellings en gevolgtrekkings
	Eenheid 2 Bladsy 87	
	Koordevierhoeke	• Koordevierhoek Stellings en gevolgtrekkings • Bewys 'n vierhoek is 'n koordevierhoek
	Eenheid 3 Bladsy 89	
	Raaklyne aan 'n sirkel	

In hierdie hoofstuk sal jy alles hersien wat jy in Graad 10 geleer het oor snylyne, parallelle lyne, driehoeke en vierhoeke.

Euclides, 'n Griekse wiskundige, wat meer as 2 000 jaar gelede geleef het, staan ook bekend as die *Vader van Meetkunde.* Sy boek, *Elemente,* is tot die vroeë twintigste eeu as die belangrikste handboek vir die onderrig van Wiskunde gebruik!

Graad 10 Hersiening

Hersiening van Graad 10		
Snylyne		
Die som van die hoeke rondom ‘n punt is 360°. 	Aangrensende hoeke by ‘n punt op ‘n lyn is aanvullend. 	Wanneer twee lynsegmente sny, is direk teenoorstaande hoeke gelyk. 
Parallelle lyne		
Wanneer ‘n skuinslyn parallelle lyne sny, is die afwisselende binnehoeke asook die afwisselende buitehoeke gelyk. 	Wanneer ‘n skuinslyn twee parallelle lyne sny, is die ooreenstemmende hoeke gelyk. 	Wanneer ‘n skuinslyn twee parallelle lyne sny, is die ko-binnehoeke en die ko-buitehoeke supplementêr. 
Driehoeke		
Die binnehoeke van ‘n driehoek is supplementêr (aanvullend) 	Die basishoeke van ‘n gelykbenige driehoek is gelyk. . 	Al die binnehoeke van ‘n gelyksydige driehoek is 60°. 
‘n Buitehoek van ‘n driehoek is gelyk aan die som van die teenoorstaande binnehoeke 	Wanneer die sye van een driehoek gelyk is aan die ooreenstemmende sye van ‘n ander driehoek is die twee driehoeke kongruent. [SSS] 	Twee driehoeke is kongruent wanneer twee sye en die ingeslote hoek van een driehoek gelyk is aan twee sye en die ingeslote hoek van die ander driehoek. [SHS] 

Driehoeke		
Wanneer twee hoeke en 'n sy van een driehoek gelyk is aan twee hoeke en die ooreenstemmende sy van 'n ander driehoek, is die twee driehoeke kongruent. [HHS] 	Twee driehoeke is kongruent wanneer die skuinssy en een sy van 'n reghoekige driehoek gelyk is aan die skuinssy en een sy van 'n ander reghoekige driehoek . [90°HS] 	Die lynsegment wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, is parallel aan die derde sy en die helfte van die lengte van die derde sy [DE||DB] 
Wanneer die ooreenstemmende sye van twee driehoeke in dieselfde verhouding is,is die twee driehoeke dieselfde. [SSS] 	Wanner die ooreenstemmende hoeke van twee driehoeke gelyk is, is die twee driehoeke dieselfde. [HHH] 	Wanneer twee pare sye van twee driehoeke in dieselfde verhouding is en die hoeke tussen daardie sye gelyk is, is die twee driehoeke dieselfde. [SHS] 
Vierhoeke		
'n parallelogram is 'n vierhoek met parallelle teenoorstaande sye. [PQ||SR, PS||QR] 	'n Reghoek is 'n parallelogram met 'n 90° binnehoek. [∠KPM = 90°] 	'n Gelykbenige trapesium is 'n vierhoek met een paar teenoorstaande sye parallel en die ander paar gelyk. [PQ||SR, PS = QR] 
'n Vierkant is 'n rhombus met 'n 90° binnehoek. [AB = BC = CD = DA] 	'n Vlieër is 'n vierhoek met twee pare aangrensende sye gelyk. [KI = KE, ET = TI] 	'n Rhombus is 'n parallelogram met al die sye gelyk. [KL = LM = MP = PK] 

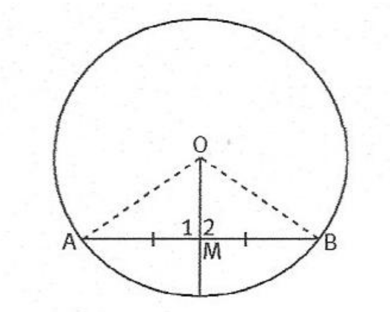
1.1 Sirkelstellings en gevolgtrekkings

Jy moet hierdie stellings en gevolgtrekkings ken en weet hoe om hulle toe te pas sodat jy vrae met betrekking tot sirkels kan beantwoord. Moenie bekommerd wees nie. Sodra jy dit onder die knie het, sal jy dit baie geniet om hierdie probleme op te los!

Onthou om afgekorte redes vir alle stellings te gee!

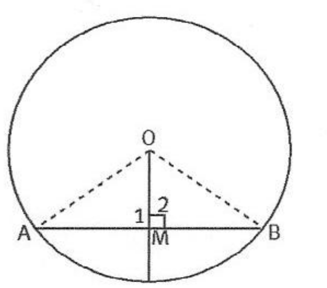
Stelling 1: Segment deur die middelpunt

- Die lynsegment (radius) wat die middelpunt van 'n sirkel en die middelpunt van 'n koord verbind,is loodreg op die koord.



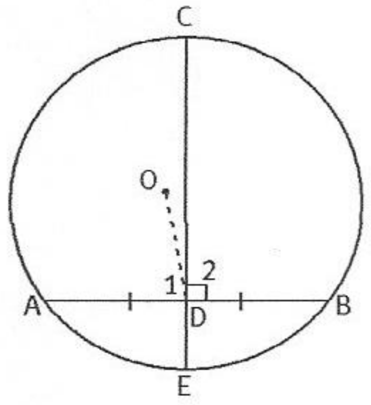
Stelling 2: Loodreg van middelpunt na koord

- 'n Lynsegment (radius) vanaf die middelpunt van 'n sirkel loodreg op 'n koord, sal die koord halveer.



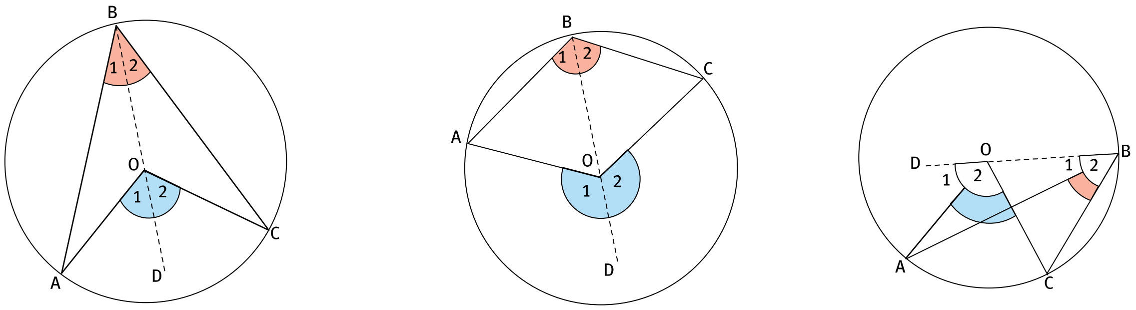
Stelling 3: Loodregte halveerder van koord

- Die loodregte halveerder van 'n koord van 'n sirkel beweeg deur die middelpunt van die sirkel.



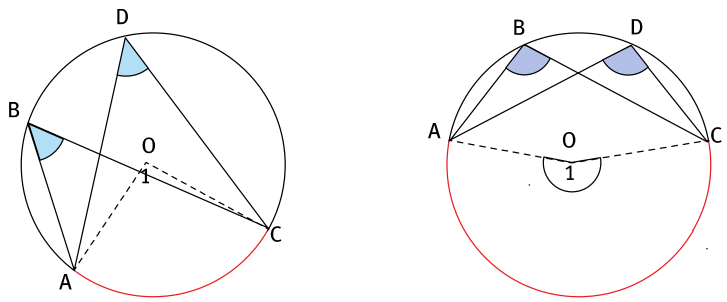
Stelling 4: Hoek by die middelpunt is twee maal so groot as die hoek op die sirkel

- 'n Hoek by die middelpunt van 'n sirkel is twee maal so groot as die hoek op die sirkel wat deur dieselfde koord of boog onderspan word.



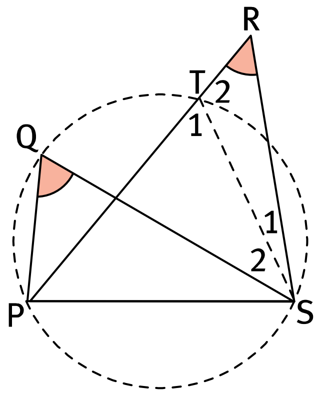
Stelling 5: Hoeke onderspan deur dieselfde boog (koord)

- Hoeke op 'n sirkel wat aan dieselfde kant deur dieslefde boog (koord) onderspan word, is ewe groot.



Stelling 6: Lynsegment onderspan gelyke hoeke

- (Teenoorgestelde van Stelling 5)
- Wanneer 'n lynsegment wat twee punte verbind, gelyke hoeke by twee ander punte aan dieselfde kant van die lynsegment onderspan, dan vorm hierdie vier punte 'n koordevierhoek.



Gevolgtrekkings

1. Gelyke koorde (boë) van 'n sirkel onderspan gelyke hoeke by die middelpunt van die sirkel.
2. Gelyke koorde (boë) van 'n sirkel onderspan gelyke hoeke in die ooreenstemende segmente op 'n sirkel.
3. Koorde (boë) van 'n sirkel is ewe groot wanneer hulle gelyke hoeke by punte op die sirkel of by die middelpunt onderspan.
4. 'n Middellyn van 'n sirkel onderspan regte hoeke op die sirkel.
5. Gelyke koorde (boë) in verskillende sirkels met gelyke radii (deursnee) onderspan gelyke hoeke op die sirkels.
6. Wanneer die lynsegment wat twee punte verbind, gelyke hoeke aan dieselfde kant daarvan onderspan, vorm daardie vier punte 'n koordevierhoek (hulle lê op 'n sirkel).

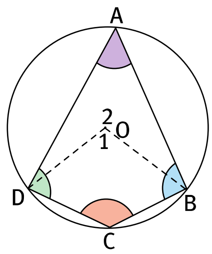
2.1 Koordevierhoek Stellings en Gevolgtrekkings

Wat beteken siklies? Dit beteken dat 'n sirkel deur al die hoekpunte getrek kan word.

Onthou om afgekorte redes vir al die stellings te verskaf!

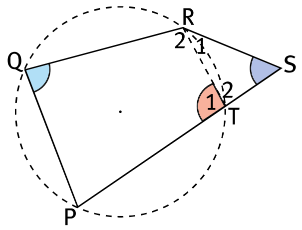
Stelling 1: Teenoorstaande binnehoeke van 'n koordevierhoek

- Die teenoorstaande binnehoeke van 'n koordevierhoek is supplementêr.



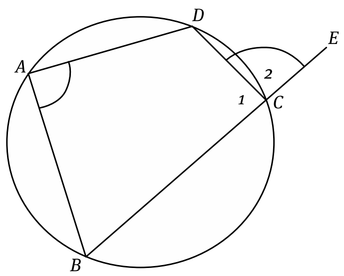
Teenoorgestelde van Stelling 1: Teenoorstaande binnehoeke is supplementêr

- Wanneer die teenoorstaande binnehoeke van 'n vierhoek supplementêr is, is die vierhoek 'n koordevierhoek.



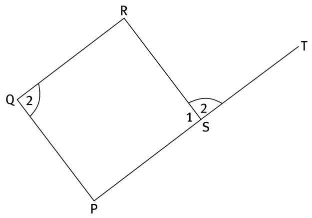
Stelling 2: Buitehoek van 'n koordevierhoek

- Die buitehoek van 'n koordevierhoek is gelyk aan die teenoorstaande binnehoek van die koordevierhoek.



Teenoorgestelde van Stelling 2: Buitehoek is gelyk aan die teenoorstaande binnehoek

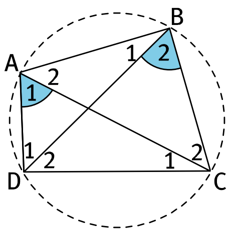
- Wanneer die buitehoek van 'n vierhoek gelyk is aan die teenoorstaande binnehoek van die vierhoek, dan is die vierhoek 'n koordevierhoek.



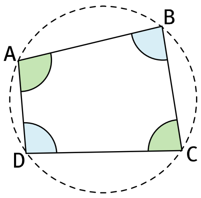
2.2 Bewys dat 'n vierhoek 'n koordevierhoek is

Dit kan op een van drie maniere gedoen word:

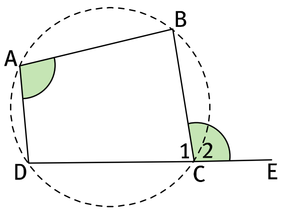
1. Wanneer enige sy van 'n vierhoek gelyke hoeke by die ander hoekpunte onderspan,is die vierhoek 'n koordevierhoek.



2. Wanneer enige twee teenoorstaande binnehoeke van 'n vierhoek supplementêr is, is die vierhoek 'n koordevierhoek.



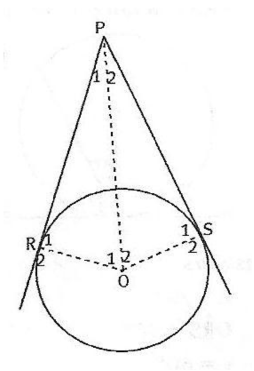
3. Wanneer 'n buitehoek van 'n vierhoek gelyk is aan die teenoorstaande binnehoek, is die vierhoek 'n koordevierhoek.



- 'n Raaklyn aan 'n sirkel is 'n lyn wat net op een punt aan die sirkel raak.
- 'n Raaklyn aan 'n sirkel is loodreg tot die radius by die kontakpunt.

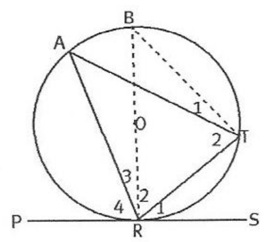
Stelling 1: Raaklyne vanaf dieselfde punt

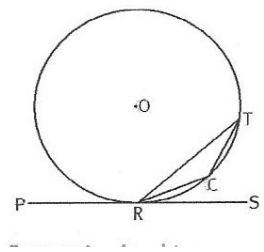
- Twee raaklyne aan 'n sirkel vanaf dieselfde punt buite die sirkel is ewe lank.



Stelling 2: Hoek tussen raaklyn en koord

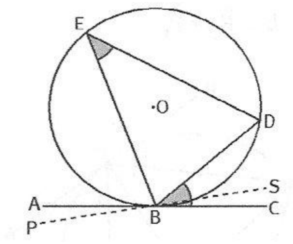
- Die hoek tussen die raaklyn aan 'n sirkel en 'n koord wat vanaf die punt van kontak geteken word is gelyk aan 'n hoek op die sirkel wat onderspan word deur die koord in die teenoorgestelde segment.





Teenoorgestelde van Stelling 2: Hoek tussen lyn en koord

- Wanneer 'n lyn, wat deur die eindpunt van 'n koord getrek is, 'n hoek vorm met die koord wat gelyk is aan 'n hoek op die sirkel, wat onderspan word deur die koord in die teenoorstaande segment van die sirkel, dan is die lyn 'n raaklyn aan die sirkel.

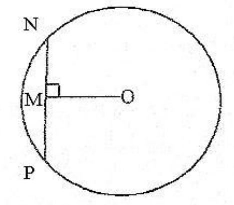


Vrae

Vraag 1

In sirkel O, OM⊥NP, NP = 23,5 cm en OM = 13,5 cm.

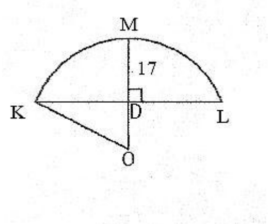
Bereken die lengte van:



1.1 NM 1.2 OP 1.3 die omtrek van die sirkel.

Vraag 2

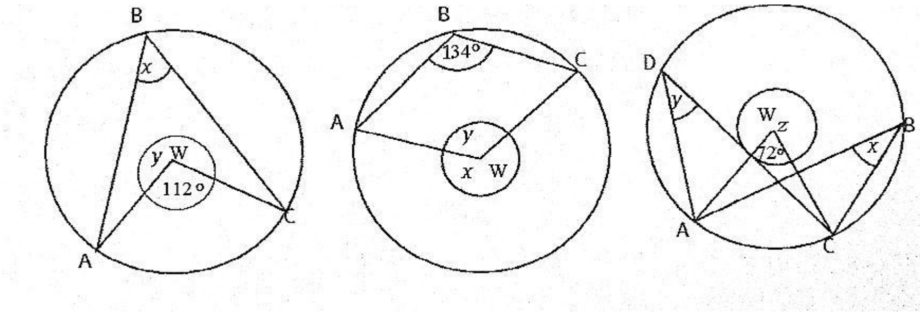
In die diagram is KL die span van 'n brug wat die boog van 'n sirkel vorm. KL is 103 m en die hoogste punt van die brug is 17 m.



Bereken die radius van die sirkel waarvan KML 'n boog is.

Vraag 3

Kyk na die diagram hieronder.

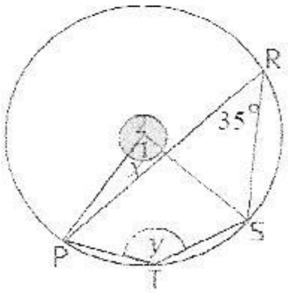


Skryf in sirkel W, die groottes van die hoeke, gemerk deur x, y en z, neer.

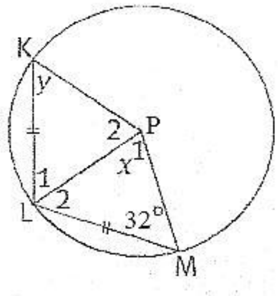
Vraag 4

Bereken, met redes, die waardes van x en y. In 4.2 is P die middelpunt van die sirkel.

4.1

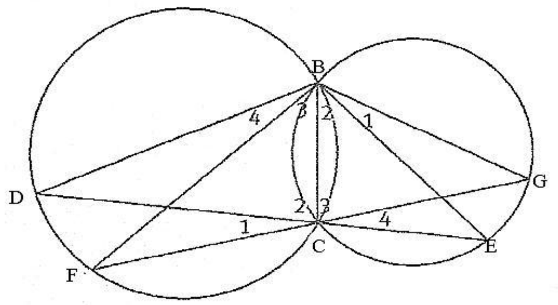


4.2



Vraag 5

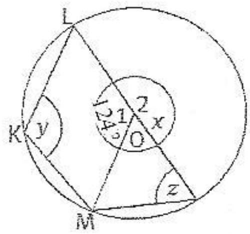
BC is ‘n gemeenskaplike koord tot die sirkels wat in B en C sny. DCE en FCG is lynsegmente wat by C sny.



Bewys dat $\widehat{B_4} = \widehat{B_1}$. verskaf redes vir al die stappe in jou bewys.

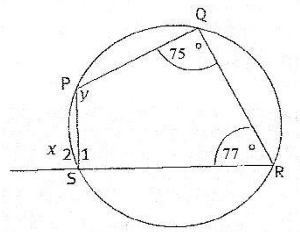
Vraag 6

Bepaal die waardes van die veranderlikes.



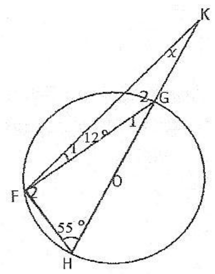
Vraag 7

Bepaal die waardes van x en y.



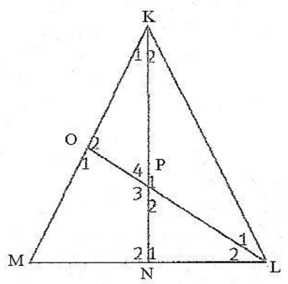
Vraag 8

Bepaal die waarde van x.



Vraag 9

In die diagram is KN⊥ML en LO⊥KM.



Bewys dat:

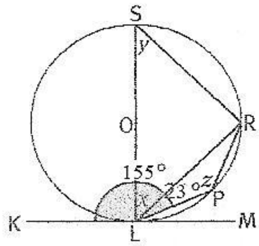
9.1 OPNM 'n koordevierhoek is.

9.2 $K_1 = L_2$

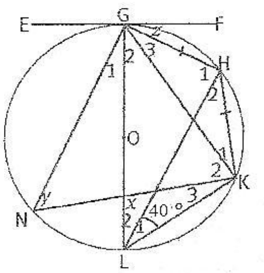
Vraag 10

O is die middelpunt van die sirkel. KM, EF en AC is raaklyne. Bereken, met redes, die waardes van x, y en z.

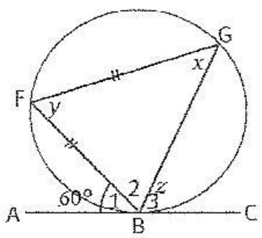
10.1



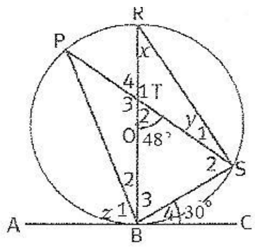
10.2



10.3

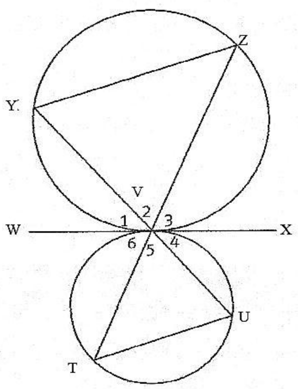


10.4



Vraag 11

Twee sirkels raak uitwendig by V. WVX is 'n raaklyn aan beide sirkels by V.



Bewys dat YZ||TU. Verskaf redes vir al die stappe van jou bewys.

Oorsig

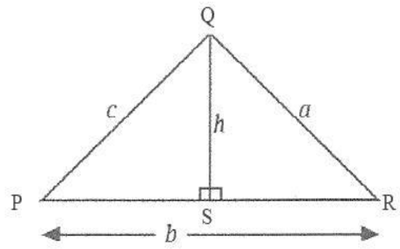
Hoofstuk 9 Bladsy 94 Trigonometrie (oppervlakte, sinus, kosinus reëls)	**Eenheid 1 Bladsy 95**	
	Die oppervlaktereël	• Los probleme op deur die oppervlaktereël te gebruik
	Eenheid 2 Bladsy 97	
	Die sinusreël	• Los probleme op deur die sinusreël te gebruik
	Eenheid 3 Bladsy 100	
	Die kosinusreël	• Los probleme op deur die kosinusreël te gebruik
	Eenheid 4 Bladsy 102	
	Los probleme in twee dimensies op	• Probleme met numeriese waardes • Probleme met veranderlikes

In hierdie hoofstuk sal jy leer hoe om die oppervlakte van enige driehoek te bereken deur die oppervlaktereël te gebruik. Jy sal ook leer hoe om verskillende lengtes en groottes te bereken deur die sinus en kosinusreëls te gebruik. Laastens sal jy leer hoe om probleme in die werklike lewe, insluitend die berekening van hoogtes, afstande en hoeke,op te los.

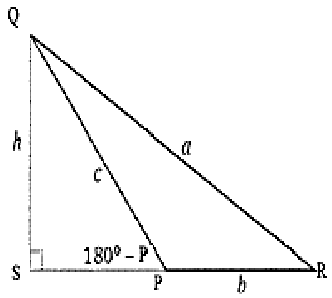
1.1 Los probleme op deur die oppervlaktereël te gebruik

- Die oppervlaktereël lui dat die oppervlakte van enige driehoek gelyk is aan die helfte van die produk van enige twee sye en die sinus van die hoek tussen die twee sye.
- Bewys van die oppervlaktereël:
  Bestudeer ΔPQR in die volgende diagramme.

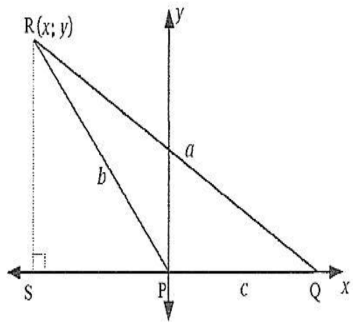
  $\widehat{\mathrm{P}}$ is'n skerp hoek:
  Die oppervlakte van $\Delta\mathrm{PQR} = (\frac{1}{2})bh$ ......(1)
  Maar, in $\Delta\mathrm{PQS}, \frac{h}{c} = \sin \mathrm{P} \therefore h = c \sin \mathrm{P}$
  Vervang dit nou in (1):
  Oppervlakte $\Delta\mathrm{PQR} = (\frac{1}{2})bc \sin \mathrm{P}$



  $\widehat{\mathrm{P}}$ is 'n stomp hoek:
  Die oppervlakte van $\Delta\mathrm{PQR} = (\frac{1}{2})bh$ ......(1)
  Maar, in $\Delta\mathrm{PQS}, \frac{h}{c} = \sin(180° - \mathrm{P})$
  $\therefore h = c \sin \mathrm{P}$
  Vervang dit nou in (1):
  Oppervlakte $\Delta\mathrm{PQR} = (\frac{1}{2})bc \sin \mathrm{P}$

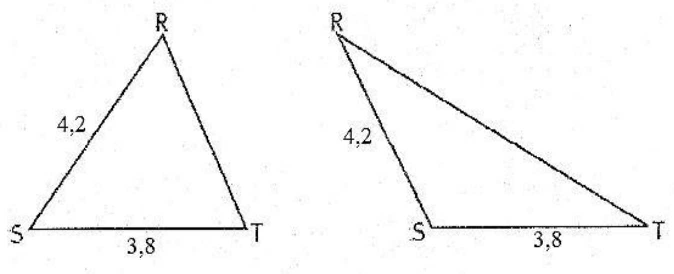


- Die oppervlaktereël kan ook bewys word deur koördinate op die Kartesiaanse vlak te gebruik:
  Laat $\widehat{\mathrm{P}}$ in die standaardposisie wees. Die koördinate van die hoogtepunt R is (; $b \sin \mathrm{P}$).
  Laat $(x; y)$ die koördinate van R wees.
  Aanvaar PQ as die basis en die y-koördinaat van R as die loodregte hoogte. Dan:
  $\frac{x}{b} = \sin \mathrm{P} \therefore x = b \sin \mathrm{P}$, en
  $\frac{y}{b} = \cos \mathrm{P} \therefore y = b \cos \mathrm{P}$
  Die oppervlakte $\Delta\mathrm{PQR} = (\frac{1}{2}) \times \text{basis} \times \text{hoogte}$
  $= (\frac{1}{2}).PQ.y_B$
  $= (\frac{1}{2})\, cb \sin \mathrm{P}$



Voorbeeld 1

Gegee Δ RST met RS = 4,2 cm en ST = 3,8 cm. As die oppervlakte van Δ RST gelyk is aan 7,55 cm³, bepaal twee moontlike groottes van $\hat{S}$.



$$\text{Oppervlakte } \Delta \text{ RST } = \frac{1}{2}\,.\,\text{RS}.\,\text{ST}.\sin \text{S}$$

$$7{,}55 = \tfrac{1}{2}(4{,}2)(3{,}8).\sin \text{S}$$

$$\sin \text{S} = 0{,}946115288$$

$$\hat{S} = 71{,}11^\circ \text{ or } \hat{S} = 180^\circ - 71{,}11^\circ$$

$$= 108{,}89^\circ$$

2.1 Los probleme op deur die sinusreël te gebruik

- Die sinusreël lui dat, in enige ΔPQR, $\frac{\sin P}{a} = \frac{\sin Q}{b} = \frac{\sin R}{c}$.
- Dit laat ons toe om die verhoudings van die sinus van die hoeke tot hul teenoorstaande sye gelyk te stel.
- Dus, as aan ons 'n hoek en 'n teenoorstaande sy gegee word, kan ons die sinusreël gebruik om die probleem op te los.
- Bewys van die sinusreël:
  Bestudeer ΔPQR in die volgende diagramme.

$\hat{P}$ 'n skerp hoek:

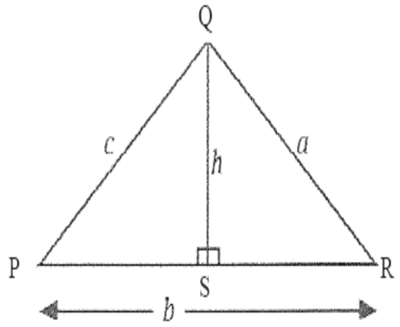
In ΔQPS: $\frac{h}{c} = \sin P \therefore h = c \sin P$

In ΔQRS: $\frac{h}{a} = \sin R \therefore h = a \sin R$

$\therefore c \sin P = a \sin R$

Deel beide kante deur ac gee

$\frac{\sin P}{a} = \frac{\sin R}{c}$



$\hat{P}$ 'n stomphoek:

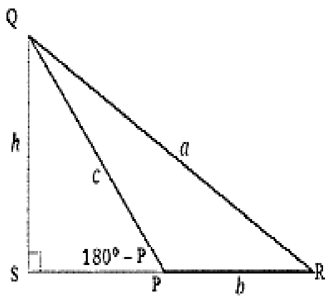
In ΔPQS: $\frac{h}{c} = \sin(180° - P) \therefore h = c \sin P$

In ΔQRS: $\frac{h}{a} = \sin R \therefore h = a \sin R$

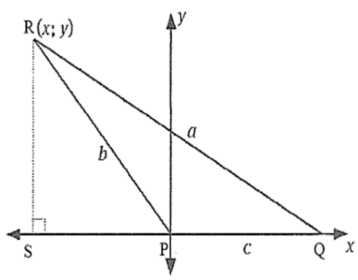
$\therefore c \sin P = a \sin R$

Deel beide kante deur ac gee

$\frac{\sin P}{a} = \frac{\sin R}{c}$



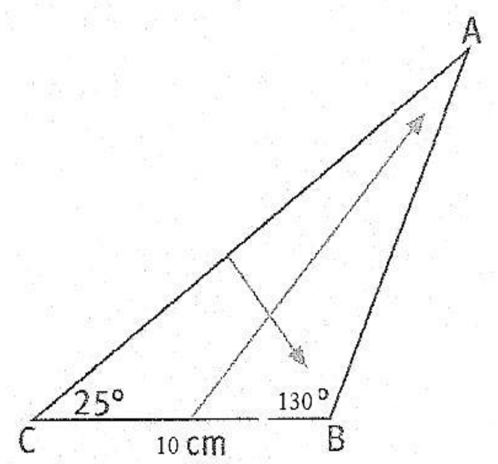
- Die sinusreël kan ook bewys word deur koördinate op die Kartesiaanse vlak te gebruik:
  Laat $\hat{P}$ in die standaardposisie wees. Die koördinate van R sal $(b \cos P;\ b \sin P)$ wees.
  As die y-as deur R getrek word,
  is die koördinate van R
  $(a \cos Q;\ a \sin Q)$
  Nou is $SR = b \sin P = a \sin Q$
  As beide kante deur ab gedeel word, gee dit $\frac{\sin P}{a} = \frac{\sin Q}{b}$



Voorbeeld 2

1 Gegee twee hoeke en een sy van 'n driehoek.

Bepaal die lengte van AC in ΔABC as $BC = 10$ cm, $\hat{B} = 130°$ en $\hat{C} = 25°$, korrek tot twee desimale plekke.



$\hat{A} = 180° - (130° + 25°) = 25°$

Nou gebruik ons die sinusreël om die lengte van AC te bereken.

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{a}{\sin A}$$

Vervang die waardes in die reël in:

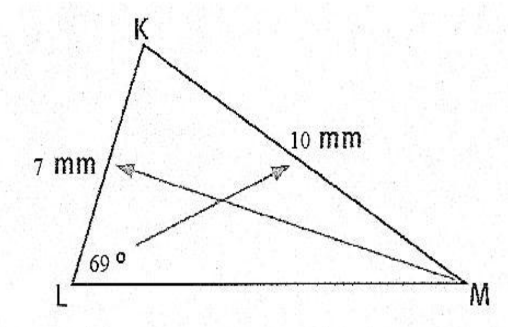
$$\therefore \frac{b}{\sin 130°} = \frac{10}{\sin 25°}$$

$$\therefore b = AC = (10 \sin 130°)/\sin 25°$$

$$= 18{,}13 \text{ cm}$$

2 Gegee twee sye en 'n hoek wat nie ingesluit is nie.

Los ΔKLM op as $LK = 7$ mm, $KM = 10$ mm en $\hat{L} = 69°$.



Ons kan die sinusreël gebruik

om $\widehat{\mathrm{M}}$ te bepaal:

$$\frac{\sin \mathrm{M}}{7} = \frac{\sin 69°}{10}$$

$\therefore \sin \mathrm{M} = 7 \sin 69°/10 = 0{,}653506298$

$\therefore \widehat{\mathrm{M}} = 40{,}81°$ of $\widehat{\mathrm{M}} \neq 180° - 40{,}81° = 139{,}19°$

$\therefore \widehat{\mathrm{M}} = 40{,}81°$

Vervolgens bereken ons die grootte van $\widehat{\mathrm{K}}$:

$\widehat{\mathrm{K}} = 180° - (69° + 40{,}81°) = 70{,}19°$

Laastens gebruik ons die twee hoeke $(\hat{\mathrm{L}}$ en $\widehat{\mathrm{K}})$en KM om die lengte van LM te bepaal:

$$\frac{k}{\sin 70{,}19°} = \frac{10}{\sin 69°}$$

$\therefore k = 10 \sin 70{,}19°/\sin 69°$

$= 10{,}08$ cm

Die kosinusreël

3.1 Los probleme op deur die kosinusreël te gebruik

- Die kosinusreël lui dat, in enige ΔPQR:
  - $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos P$ of $\cos P = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc$
  - $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos Q$ of $\cos Q = (a^2 + c^2 - b^2)/2ac$
  - $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos R$ of $\cos R = (a^2 + b^2 - c^2)/2ab$
- Dus, as daar twee sye en die ingeslote hoek gegee word, of drie sye van 'n driehoek, kan ons die kosinusreël gebruik om die probleem op te los.
- Bewys van die kosinusreël:
  Bestudeer ΔPQR in die volgende diagramme.

$\hat{P}$ 'n skerphoek:

In ΔQSR: $a^2 = QS^2 + RS^2$

$= QS^2 + (b - PS)^2$

$= QS^2 + b^2 - 2bPS + PS^2$

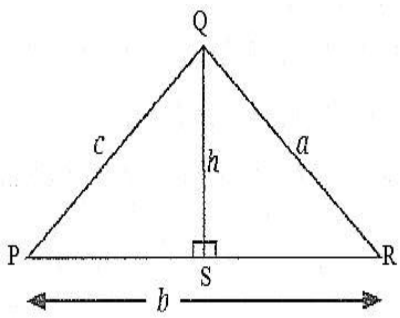
Maar $QS^2 + PS^2 = c^2$

$\therefore a^2 = b + c^2 - 2bPS$

In ΔPQS: $\frac{PS}{c} = \cos P$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos P$

of $\cos P = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc$



$\hat{A}$ 'n stomphoek:

In ΔQPR: $a^2 = QS^2 + PR^2$

$= QS^2 + (b - PS)^2$

$= QS^2 + b^2 - 2bPS + PS^2$

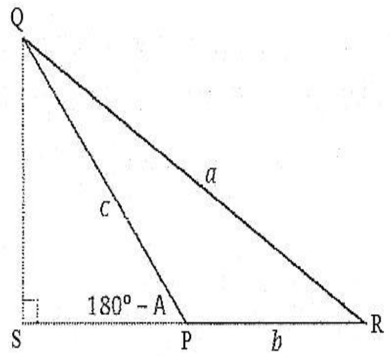
Maar $QS^2 + PS^2 = c^2$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bPS$

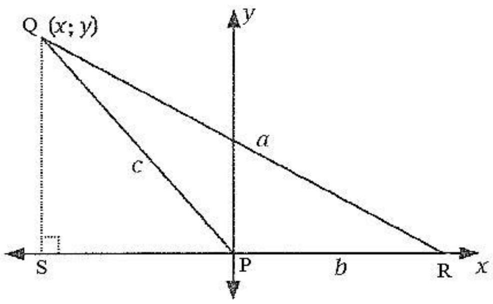
In ΔPQS: $\frac{PS}{c} = \cos(180° - A) = -\cos A$

$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

Of $\cos A = (b^2 + c^2 - a^2)/2bc$

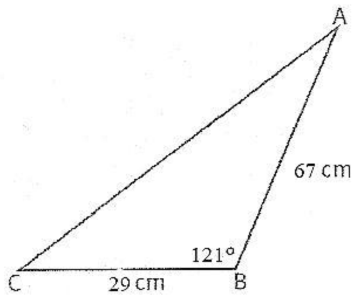


- Die kosinusreël kan ook bewys word deur koördinate op die Kartesiaanse vlak te gebruik:
  Laat $\widehat{P}$ in die standaardposisie wees. Die koördinate van R sal ($b\cos P$; $b\sin P$) en B(a; 0)wees.
  Gebruik die afstandsformule,
  $a = \sqrt{(b^2 - 2bc\cos P) + c^2(\cos^2 P + \sin^2 P)}$
  Maar, $\sin^2 P + \cos^2 P = 1$
  $\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos P$



Voorbeeld 3

Los ΔABC op as BC = 29 cm, ^B = 121° en c = 67 cm. verskaf jou antwoord korrek tot twee desimale plekke



$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$

$= 29^2 + 67^2 - 2(29)(67)\cos 121°$

$= 7\,331{,}437959$

$\therefore b = 85{,}62$ cm

Nou pas ons die sinusreël toe om die grootte van of ^A te bepaal

sin A/29 = sin 121°/85,62

∴ sin A = 29 sin 121/85,62 = 0,29032763

∴ ^A = 16,88° of ^A ≠ 180° - 16,88° = 163,12°

∴ ^A = 16,88°

En dus, ^C = 180° - (121° + 16,88°) = 42,12°

4.1 Probleme met numeriese waardes

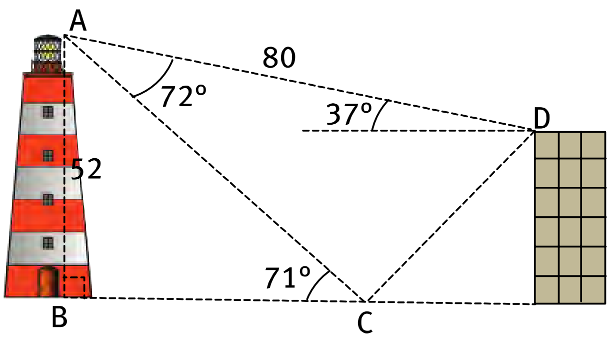
- Wanneer ons bewus is van die hoogtehoeke tussen voorwerpe op die grond en hoër voorwerpe, kan ons die afstande tussen die voorwerpe en die hoër voorwerpe bereken, asook die oppervlakte tussen hulle deur gebruik te maak van die oppervlakte-, sinus- en kosinusreëls.

4.2 Probleme met veranderlikes

- Wanneer ons die hoogtehoeke ken, asook die hoeke en oppervlakte tussen voorwerpe op die grond en hoër voorwerpe, kan ons die oppervlakte-, sinus- en kosinusreëls gebruik om onbekende veranderlikes in die data op te los.

Voorbeeld 4

1 Die hoogtehoek vanaf 'n punt C na die bopunt van 'n ligtoring is 71°. Die hoogtehoek $\hat{D}$, vanaf die bopunt van 'n kantoorblok na die bopunt van die ligtoring is 37°. AD = 80 m, die hoogte van die ligtoring is 52 m, en $\widehat{CAD} = 72°$.



Bereken, korrek tot twee desimale plekke:

1.1 die afstand AC:

In ΔABC: $\frac{52}{AC} = \sin 71°$

$\therefore AC = {}^{52}/_{\sin 71°}$

$\approx 55{,}00$ m

1.2 die afstand CD:

In ΔACD, $CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC.AD.\cos \widehat{CAD}$

$= 3\,025 + 6\,400 - 2(55)(80)\cos 72°$

$= 6\,705{,}65045$

$\therefore CD = 81{,}89$ m

1.3 die grootte van $\widehat{CDE}$:

$\sin \widehat{ADC} \,/\, 55{,}00 = \sin 72° \,/\, 81{,}89$

$\sin \widehat{ADC} = 0{,}638760635$

$\therefore \widehat{ADC} = 39{,}70°$

$\therefore \widehat{CDE} = 2{,}70°$

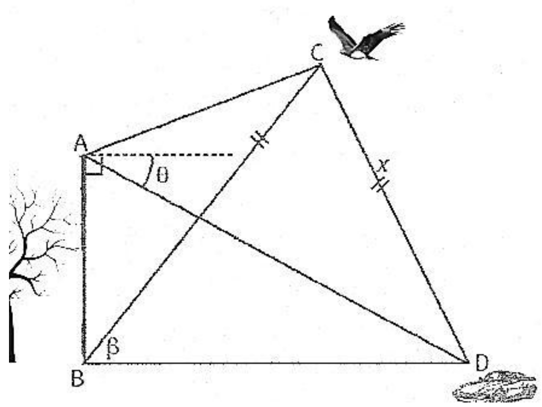
1.4 die oppervlakte van ΔACD:

Oppervlakte $\Delta ACD = \frac{1}{2} AC.AD.\sin \widehat{CAD}$

$= \frac{1}{2}(55)(80)\sin 72°$

$= 2\,092{,}32$ vierkante eenhede

2 ‘n Sterrekyker, A, klim teen ‘n hoë boom uit.Sy kan haar motor, D, sien waar dit ‘n paar meter van die boom af geparkeer is. Die hoek van depressie van D vanaf A is θ. ‘n Arend, C, wat op ‘n spesifieke tyd verbyvlieg, is ewe vêr van die voet van die boom as van die motor. Op daardie oomblik is die hoogtehoek van C vanaf B ß. Laat BC = CD = x meter.



Bewys dat $AB = \sqrt{2\,x\tan\theta}\,\sqrt{(1\ +\ \cos 2ß)}$.

In $\Delta ABD, \widehat{ADB}\ =\ \theta$.

$AB/BD\ =\ \tan\theta$

$AB\ =\ DB\tan\theta$ ………. (1)

In ΔBCD:

$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC.CD.\cos\widehat{BCD}$

$= x^2 + x^2 - 2(x)(x)\cos(180° - 2ß)$

$= 2x^2(1\ +\ \cos 2ß)$

$\therefore\ BD\ =\ \sqrt{2.x.}\sqrt{(1\ +\ \cos 2ß)}$ ………. (2)

vervang (2) in (1)in:

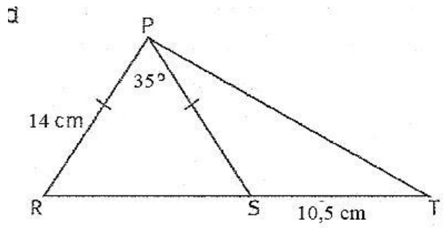
$AB\ =\ \sqrt{2.x.\tan\theta.}\sqrt{(1\ +\ \cos 2ß)}$

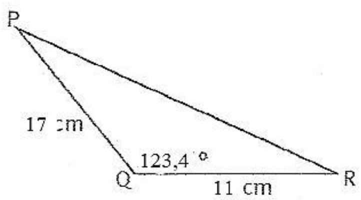
Vrae

Vraag 1

Bepaal die oppervlakte van elk van die driehoeke,korrek tot 2 desimale plekke.

1.1





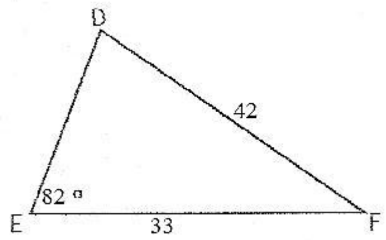
Vraag 2

ABC is ‘n regs-hoekige driehoek. D is is ‘n punt op AC sodat DC = 24 eenhede. As BC = 19 eenhede en die oppervlakte van ΔBCD = 109 vierkante eenhede, bepaal die lengte van AB korrek tot twee desimale plekke.

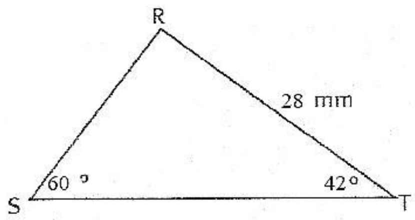
Vraag 3

Los die volgende driehoeke op,en gee jou antwoord korrek tot twee desimale plekke.

3.1



3.2



Vraag 4

In die diagram hieronder is HL = 21,3 cm, EF = 13,9 cm, $\widehat{HEF}$ = 128°, $\widehat{HFE}$ = 37° en $\widehat{EGF}$ = 15°. Bepaal, korrek tot twee desimale eenhede:

4.1 lengte van EF

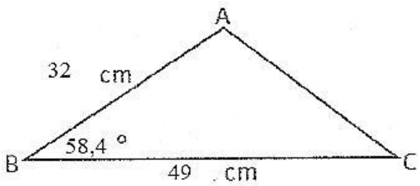
4.2 oppervlakte van ΔHEF

4.3 grootte van $\widehat{HFG}$ as $\widehat{EFG}$ 'n stomphoek is.

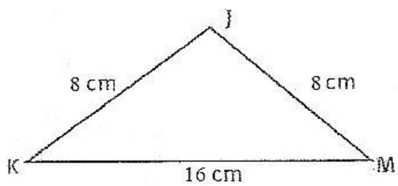
Vraag 5

Los die volgende driehoeke op,en verskaf jou antwoorde korrek tot twee desimale plekke.

5.1



5.2



Vraag 6

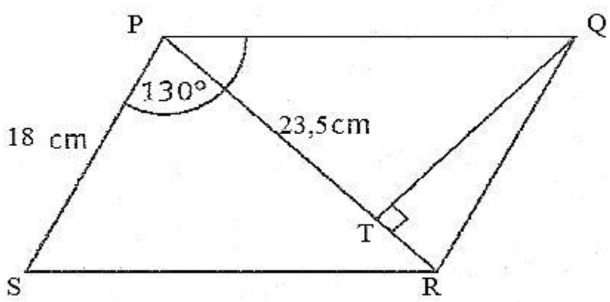
Bewys dat in enige driehoek VWX, $\cos W = (v^2 + x^2 - w^2)/2vx$.

Vraag 7

Bereken sonder om 'n sakrekenaar te gebruik, die lengte van AC in ΔABC as BC = 12,5 cm, AB = 93 mm en $\hat{B} = 124,7°$.

Vraag 8

PQRS is 'n parallelogram met PS = 18 cm, PR = 23,5 cm en $\hat{P} = 130°$. QT word loodreg op PR getrek.



Bereken:

8.1 $P\hat{S}R$

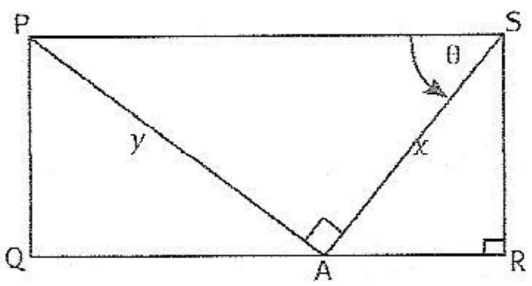
8.2 $P\hat{R}S$ (tot twee desimale plekke)

8.3 die oppervlakte van ΔPSR (tot die naaste vierkante cm)

8.4 die lengte van QT.

Vraag 9

PQRS is 'n reghoek.



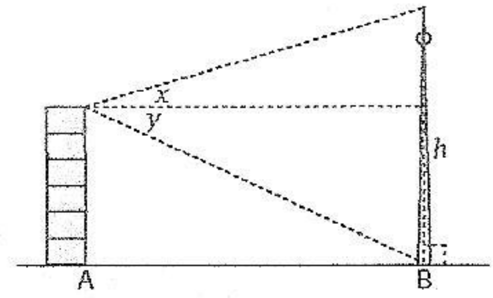
Druk die volgende uit in terme van x en/of y en θ:

9.1 RS

9.2 AR

Vraag 10

Die hoogtehoek vanaf die bopunt van 'n voorstedelike huis na die bopunt van 'n nabygeleë woonstelblok is $x°$, en die depressiehoek na die voet van die woonstelblok is $y°$. Daar word aangeneem dat die hoogte van die woonstelblok 15 m is en die huis en die woonstelblok le op dieselfde horosontale vlak.

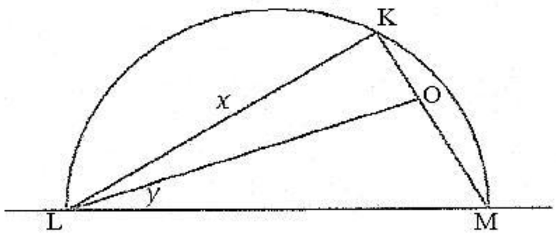


10.1 Toon dat AB, die afstand tussen die huis en die woonstelblok, gegee word deur $AB = (15 \cos x . \cos y)/\sin(x + y)$.

10.2 As $x = 102°$ en $y = 30°$, wat is die korrekte waarde van h, die hoogte van die woonstelblok?

Vraag 11

LM is die middellyn van 'n semi-sirkel. K is 'n punt op die omtrek. KM = 11,14 eenhede. O is 'n punt op KM sodat KO:OM = 1:3. Laat KL = x eenhede wees en $\widehat{OLM} = y$.



Vind die algemene oplossing vir $\cos y$.

Oorsig

Hoofstuk 10 Bladsy 108 Finansies, groei en waardevermindering	**Eenheid 1 Bladsy 109** Saamgestelde groei	• Verskillende saamstellingstydperke • Tydlyne • Nominale en effektiewe rentekoerse
	Eenheid 2 Bladsy 112 Waardevermindering	• Lineêre waardevermindering • Die lineêre waardeverminderingsmetode • Saamgestelde toename en afname gekombineer

In hierdie hoofstuk sal jy leer hoe om die huidige en toekomstige waarde van beleggings en skuld akkuraat en vinnig te bereken, gebaseer op paaiemente betaal teen verskillende rentekoerse, en saamgestel vir verskillende tydperke.

In Graad 10 het jy geleer van enkelvoudige rente en saamgestelde rente.

Enkelvoudige rente: $A = P(1 + i.n)$

Saamgestelde rente: $A = P(1 + i)^n$

waar A die finale bedrag is (die hoofsom plus rente)

P die hoofsomwaarde is

i die rentekoers is

n die aantal tydperke is.

Onthou, as die rentekoers 18% is, gebruik ons 18/100 = 0,18 in die formule.

Saamgestelde groei

1.1 Verskillende saamstellingstydperke

- Wanneer jy 'n lening aangaan of geld in 'n rentedraende rekening belê, kan die rente jaarliks of meer gereeld saamgestel word. Dit hang van die kontrak af.
- 'n Rentekoers wat jaarliks gekwoteer, maar meer gereeld saamgestel word, word 'n nominale of gekwoteerde rentekoers genoem.
- As die rentekoers n keer per jaar saamgestel word (veronderstel 'n rentekoers van 13% word gebruik), is die koers wat ons in die formule gebruik 13%/n sodat ons die aantal saamstellingstydperke in die antwoord kan insluit.
- Meer gereelde saamstelling beteken dat die waarde van A, die finale bedrag, groter is.

Voorbeeld 1

Josephine belê R102 000 vir drie jaar. Die bank kwoteer 'n rentekoers van 12,5% per jaar, en gee vir haar 'n keuse van verskillende saamstellingstydperke:

- 12,5% halfjaarliks saamgestel
- 12,5% kwartaalliks saamgestel
- 12,5% maandeliks saamgestel
- 12,5% daagliks saamgestel (gebruik 365 dae per jaar).

Bepaal die saamstellingstydperk wat vir Josephine die beste opbrengs vir haar belegging sal gee.

Laat P die oorspronklike bedrag wees wat belê is (R102 000), n die aantal saamstellingstydperke, en i die rentekoers per saamstellingstydperk.

Halfjaarliks: $A = 102\ 000(1 + \frac{0{,}125}{2})^6 = \text{R}146\ 748{,}55\ (n = 3 \text{ jaar} \times 2 \text{ tydperke} = 6)$

Kwartaalliks: $A = 102\ 000(1 + \frac{0{,}125}{4})^{12} = \text{R}147\ 559{,}68\ (n = 3 \text{ jaar} \times 4 \text{ tydperke} = 12)$

Maandeliks: $A = 102\ 000(1 + \frac{0{,}125}{12})^{36} = \text{R}148\ 121{,}54\ (n = 3\ jaar \times 12 \text{ tydperke} = 36)$

Daagliks: $A = 102\ 000(1 + \frac{0{,}125}{365})^{1\ 095} = \text{R}148\ 399{,}60\ (n = 3 \text{ jaar} \times 365 \text{ tydperke} = 1\ 095)$

Die beste opbrengste sal dus deur daaglikse saamstelling gelewer word.

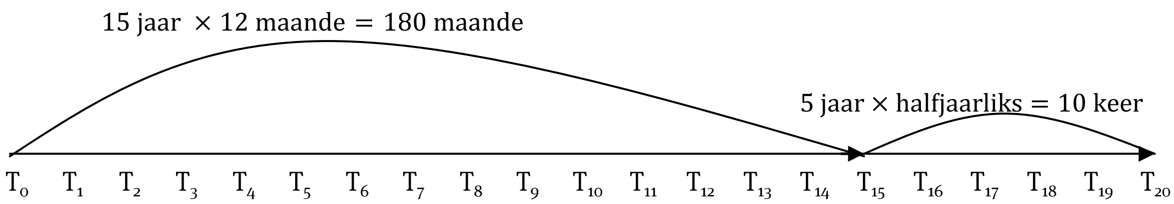
1.2 Tydlyne

- Ons gebruik tydlyne wanneer ons met verskillende saamstellingstydperke binne 'n enkele belegging of lening werk. Dit maak dit makliker om die koerse wat gebruik is oor tyd raak te sien.

Voorbeeld 2

Musa leen R500 000 vir 20 jaar teen 'n rentekoers van 10%, maandeliks saamgestel vir die eerste 15 jaar teen 'n rentekoers van 18%, en halfjaarliks saamgestel vir die laaste 5 jaar.

Ons kan dit op die volgende manier grafies voorstel:



1.3 Nominale en effektiewe rentekoerse

- Wanneer ons aan die einde van elke saamstellingstydperk die rentekoers bereken, is die ware rentekoers wat aan die einde van die leningstydperk of beleggingstydperk verdien of betaal is, nie dieselfde as die gekwoteerde rentekoers nie. Hierdie rentekoers word die effektiewe rentekoers genoem, en word met die volgende formule bereken:

  $i_{\text{eff}} = (1 + i_{\text{nom}}/m)^m - 1$

  waar i_{eff} die effektiewe rentekoers is
  i_{nom} die nomale rentekoers is
  m die aantal saamstellingstydperke per jaar is.
- As die nominale rentekoers jaarliks saamgestel word, sal die effektiewe rentekoers gelyk wees aan die nominale rentekoers.

Voorbeeld 3

Bepaal die effektiewe jaarlikse rentekoers vir elk van die volgende nominale rentekoerse, korrek tot twee desimale plekke.

1 1.1 13,25% halfjaarliks saamgestel:

$$i_{\text{eff}} = (1 + \frac{0,1325}{2})^2 - 1$$
$$= 0,136889062 \text{ of } 13,69\%$$

1.2 13,25% kwartaalliks saamgestel:

$$i_{\text{eff}} = (1 + \frac{0,1325}{4})^4 - 1$$
$$= 0,139230185 \text{ of } 13,92\%$$

1.3 13,25% weekliks saamgestel:

$$i_{\text{eff}} = (1 + \frac{0,1325}{52})^{52} - 1$$
$$= 0,141486632 \text{ of } 14,15\%$$

1.4 13,25% daagliks saamgestel:

$$i_{\text{eff}} = (1 + \frac{0,1325}{365})^{365} - 1$$
$$= 0,141651566 \text{ of } 14,17\%$$

2 Watter een van die nominale koerse het die hoogste opbrengste gelewer?

Die koers van 13,25% daagliks saamgestel lewer die beste opbrengste.

Eenheid 2

Verval

Finansiële waardevermindering verwys na die geleidelike verlies aan waarde oor tyd. Wanneer ‘n bate geleidelik waarde verloor, word dit waardevermindering genoem.

2.1 Lineêre waardevermindering

- Lineêre waardevermindering word as ‘n persentasie van die oorspronklike waarde bereken. Dieselfde bedrag word vir elke saamstellingstydperk van die oorspronklike bedrag afgetrek.
- Die formule wat gebruik word om lineêre waardevermindering te bereken, is:
  $A = P(1 - in)$

  waar P die oorspronklike waarde van die bate is
  A die finale waarde van die bate is
  i die koers is waarteen die bate se waarde elke jaar verminder
  n die hoeveelheid jaar is waaroor die bate se waarde verminder.

Voorbeeld 4

‘n Trekker is in Mei 2008 vir R198 000 gekoop. Die waarde van die trekker verminder teen ‘n koers van 5% per jaar, op ‘n lineêre basis. Bepaal die waarde na sewe jaar.

Die trekker se waarde verminder met 5% per jaar: R198 000 × 5% = R9 900.

Na sewe jaar sal die trekker R198 000 − (7 × R9 900) = R128 700 werd wees.

Gebruik die formule: $A = 198\,000(1 - 0{,}05(7)) = \text{R}128\,700$.

2.2 Die afnemendebalans-metode

- Die afnemendebalans-metode verminder die waarde van ‘n bate deur die waardevermindering op die verminderde waarde van die bate aan die einde van elke saamstellingstydperk te bereken.
- Die formule wat gebruik word om waardevermindering volgens die afnemendebalans-metode te bepaal, is:
  $A = P(1 - i)^n$

  waar P die oorspronklike waarde van die bate is
  A die finale waarde van die bate is
  i die koers is waarteen die bate se waarde per jaar verminder
  n die aantal jaar is waaroor die bate se waarde verminder.

Voorbeeld 5

n Trekker is in Mei 2008 vir R198 000 gekoop. Die waarde van die trekker verminder teen 'n koers van 5% per jaar, op 'n lineêre basis. Bepaal die waarde van die trekker na sewe jaar.

Die trekker se waarde verminder soos volg:

Jaar 1: 5% van R198 000 = R9 900

R198 000 – R9 900 = R188 100

Jaar 2: 5% van R188 100 = R9 405

R188 100 – R9 405 = R178 695

Jaar 3: 5% van R178 695 = R8 934,75

R178 695 – R8 934,75 = R169 760,25

Jaar 4: 5% van R169 760,25 = R8 488,01

R169 760,25 – R8 488,01 = R161 272,24

Jaar 5: 5% van R161 272,24 = R8 063,61

R161 272,24 – R8 063,61 = R153 208,63

Jaar 6: 5% van R153 208,63 = R7 660,43

R153 208,63 – R7 660,43 = R145 548,20

Jaar 7: 5% van R145 548,20 = R7 277,41

R145 548,20 – R7 277,41 = R138 270,79

Dus, na sewe jaar sal die trekker R138 270,79 wêrd wees.

Met die formule: $A = \text{R}198\,000(1 - 0{,}05)^7 = \text{R}138\,270{,}79$.

2.3 Saamgestelde toename en afname gekombineer

- In Graad 10 het jy geleer dat inflasie veroorsaak dat die pryse van goedere toeneem oor tyd. In die vorige afdeling het jy geleer dat waardevermindering veroorsaak dat bates se waarde oor tyd afneem. Wat sal gebeur as jy gevra word om die effek van albei in een vraag te bereken? Kyk na die volgende voorbeeld.

Voorbeeld 6

‘n Hospitaal koop ‘n nuwe ambulans vir R899 995. Die ambulans se waarde verminder teen 12% per jaar (lineêre metode). Die verwagte inflasiekoers vir die volgende tien jaar is 6,1% per jaar. Dit beteken dat die prys vir nuwe ambulanse oor die volgende 10 jaar sal toeneem.

Bereken:

1 1.1 Die skrapwaarde van die ambulans na sewe jaar:

$P = 899\,995, \quad n = 7, \quad i = 12\%$

$A = P(1 - i)^n$

$= 899\,995(1 - 0{,}12)^7 \qquad = 367\,805{,}99$

1.2 Die koste van ‘n nuwe ambulans na sewe jaar:

$P = 899\,995, \quad n = 7, \quad i = 12\%$

$A = P(1 + i)^n$

$= 899\,995(1 + 0{,}12)^7 \qquad = 1\,989\,602{,}21$

1.3 Die vderskil tussen die prys van ‘n nuwe ambulans en die skrapwaarde van die bestaande ambulans na sewe jaar.

$1\,989\,602{,}21 - 367\,805{,}99 = 1\,621\,796{,}22$

2 Bereken hoeveel die hospitaal nou moet belê teen ‘n rentekoers van 5,5% per jaar, maandeliks saamgestel, om na sewe jaar ‘n nuwe ambulans te kan bekostig.

$A = 1\,621\,796{,}22, \quad n = 7, \quad i = 0{,}055$

$A = P(1 + i)^n$

$1\,621\,796{,}22 = \quad P(1 + \frac{0{,}055}{23})^7 \times 12$

$P = 1\,621\,796{,}22/(1 + \frac{0{,}055}{12})84$

$= 1\,104\,523{,}39$

Vrae

Vraag 1

Watter een van die volgende beleggings sal na sewe jaar die grootste opbrengste lewer?

1.1 R61 000 belê teen 15% per jaar, elke vier maande saamgestel

1.2 R61 000 belê teen 14% per jaar, daagliks saamgestel.

Vraag 2

'n Belegging bied R999 822 na tien jaar. Toe die belegging tien jaar gelede gemaak is, het die bank 'n rentekoers van 3,2% per jaar, maandeliks saamgestel, aangebied. Bereken die oorspronklike beleggingsbedrag.

Vraag 3

Dikeledi wil hê dat haar beleggingsbedrag se waarde vier maal soveel moet wees binne vier jaar. Teen watter rentekoers, kwartaalliks saamgestel, moet sy haar geld belê? Dink jy dat dit moontlik is?

Vraag 4

Stephni het nege jaar gelede Rx in 'n beleggingsrekening gedeponeer. Gedurende die eerste twee jaar het die belegging 12% per jaar, maandeliks saamgestel, verdien. Na twee jaar het Stephni R19 201,85 onttrek. Sy het die geld herbelê teen 7,5% per jaar, daagliks saamgestel. Na sewe jaar ontvang sy 'n enkelbedrag van R3 111 052.

Los op vir x, korrek tot die naaste sent.

Vraag 5

Die opbrengs van 'n belegging wat Larisse negentien jaar gelede gemaak het, is R5 825 156. Gedurende die eerste ses jaar is 9% per jaar rente verdien, jaarliks saamgestel. Gedurende die laaste dertien jaar het die belegging 12,4% per jaar rente verdien, maandeliks saamgestel.

Bereken die oorspronklike beleggingsbedrag.

Vraag 6

Sam deponeer R30 125 in ‘n beleggingsrekening vir vyf jaar. Vir die eerste twee jaar verdien die belegging 13% rente per jaar, maandeliks bereken, en is R39 015,43 werd. Aan die einde van die beleggingstydperk ontvang Sam ‘n uitbetaling van R47 540,04.

Bereken die rente wat in die laaste drie jaar van die belegging verdien is, kwartaalliks saamgestel.

Vraag 7

Mnr. Mhlongo deponeer R10 000 in ‘n spaarrekening teen 4,32% rente per jaar, kwartaalliks saamgestel, vir 15 jaar.

7.1 Gebruik die nominale koers om die finale waarde van die belegging na 15 jaar te bereken.

7.2 Bepaal die effektiewe gelykstaande jaarlikse koers.

7.3 Bepaal of die effektiewe jaarlikse koers dieselfde finale waarde vir die belegging sal bied.

Vraag 8

‘n NRO ontvang ‘n donasie van 1 650 kg mieliesaad.

8.1 Bepaal vir hoeveel dae hulle vir arm gemeenskappe saad kan gee as hulle 3% per dag saad uitdeel met die lineêre metode. Rond jou antwoord tot twee desimale plekke af.

8.2 Na hoeveel dae sal hulle 132 kg mieliesaad oorhê as hulle teen 8% per dag saad uitdeel met die lineêre metode? Rond jou antwoord tot twee desimale plekke af.

8.3 ‘n Bekommerde lid van die gemeenskap vra dat hulle die donasies kan verminder sodat die saad vir 75 dae sal hou. Bereken watter persentasie hulle per dag kan uitdeel, korrek tot twee desimale plekke.

Vraag 9

‘n Dokter koop nuwe mediese toerusting ter waarde van R2 605 252 vir sy praktyk.

9.1 Bepaal die verminderde waarde van die toerusting na sewe jaar as die waardeverminderingskoers 12,5% per jaar is, op ‘n afnemende balans.

9.2 Bepaal die waardeverminderingskoers op 'n afnemende balans as die toerusting se waarde na vier jaar na R650 000 verminder.

Vraag 10

'n Plasmatelevisieskerm wat vier jaar gelede gekoop is is nou R1 260 werd. Bereken wat vier jaar gelede vir die skerm betaal is as die waardeverminderingskoers op 'n afnemende balans 15% per jaar was.

Vraag 11

'n Skool koop 'n nuwe bus teen R1 250 000. Hulle weet dat die bus na vyf jaar vervang sal moet word. Hierdie soort bus se waarde verminder gewoonlik teen 17% op 'n afnemende balans. Die verwagte gemiddelde inflasiekoers oor die volgende vier jaar is 6,02%.

11.1 Bereken:

11.1.1 die waarde van die bus na vyf jaar

11.1.2 die koste van 'n nuwe bus na vyf jaar

11.1.3 die verskil tussen die koste van 'n nuwe bus en die waarde van die ou bus na vyf jaar.

11.2 Aan die einde van die derde jaar skenk 'n welgestelde ouer R75 000 aan die skool vir 'n nuwe bus. As die skool hierdie donasie teen 12% per jaar belê, maandeliks saamgestel, sal hulle die verskil tussen die koste van 'n nuwe bus en die herverkoopwaarde van die ou bus na vyf jaar kan dek?

Vraag 12

Mnr. Gumede skenk 15 nuwe rekenaars aan sy plaaslike gemeenskapsentrum. Die rekenaars se huidige waarde is R45 000, en rekenaars se waarde verminder gewoonlik teen 10% op 'n afnemende balans. Die sentrum sal die rekenaars na 2,5 jaar moet vervang. Die verwagte inflasiekoers is 7,26% jaarliks vir die volgende vier jaar.

As Mev. Sithole ('n ander welgestelde lid van die gemeenskap) R8 000 aan die gemeenskapsentrum skenk op dieselfde tyd as wat Mnr. Gumede die rekenaars skenk, en die sentrum die geld teen 15% per jaar (weekliks saamgestel) belê, sal hulle na 2,5 jaar genoeg geld hê om die rekenaars te vervang? Indien nie, hoeveel sal hulle nog nodig hê?

Oorsig

Hoofstuk 11 Bladsy 118 Waarskynlikheid	Eenheid 1 Bladsy 119	
	Kombinasies van gebeurtenisse	• Venn-diagramme • Onderling uitsluitende gebeurtenisse • Komplementêre gebeurtenisse
	Eenheid 2 Bladsy 121	
	Afhanklike en onafhanklike gebeurtenisse	• Reëls van waarskynlikheid
	Eenheid 3 Bladsy 122	
	Boomdiagramme	• Boomdiagramme vir afhanklike gebeurtenisse • Gebeurlikheidstabelle

Waarskynlikheid word gebruik om gebeurlikhede te ontleed. Dit gee vir ons 'n aanduiding van die antwoord op die vraag: "Sal die gebeurtenis plaasvind?", sodat ons beter ingeligte besluite kan neem.

In hierdie hoofstuk sal jy leer hoe om Venn-diagramme, onderling uitsluitende gebeurtenisse en komplementêre gebeurtenisse te gebruik om die waarskynlikheid te bepaal. Jy sal ook leer hoe om boomdiagramme en gebeurlikheidstabelle te gebruik om die berekening van waarskynlikheid makliker te maak.

Kombinasies van gebeure

1.1 Venn diagramme

- Venn-diagramme is 'n visuele manier om die verbintenis tussen verskillende stelle data te illustreer.
- Die data word in sirkels voorgestel, wat dit maklik maak om die waarskynlikheid te bereken.
- S is die proefruimte, en die ruimte waar die sirkels oorvleuel is waar gekombineerde gebeurtenisse plaasvind.
- Venn-diagramme help ons ook om konsepte soos onderling uitsluitende en komplementêre stelle te verstaan.

1.2 Onderling uitsluitende gebeurtenisse

- Twee gebeure is onderling uitsluitend as daar geen gemeenskaplike elemente tussen die twee gebeure is nie. As A en B onderling uitsluitend is, dan
  - $P(\text{A en B}) = 0$
  - $P(\text{A of B}) = P(A) + P(B)$

1.3 Komplementêre gebeurtenisse

- Twee gebeure is komplementêr as hulle onderling uitsluitend is, en $P(A) + P(B) = 1$.

Voorbeeld 1

1 Ons gooi drie muntstukke op.

1.1 Wat is die proefruimte?

S = {KKK; KKM; KMK; MKK; KMM; MKM; MMK; MMM}

1.2 Wat is die waarskynlikheid dat jy die volgende sal kry:

1.2.1 drie kruise? 1/8

1.2.2 twee munte en 'n kruis? 3/8

1.2.3 drie munte en 'n kruis? 0

1.2.4 'n kruis en twee munte 3/8

1.2.5 'n kruis, 'n munt en 'n kruis, in hierdie volgorde? 1/8

2 ‘n Skool gebruik drie boeke met verskillende kleure in hulle klasse – Rooi (R), Groen (G) en Blou (B). Uit die 400 leerders gebruik 150 R, 265 gebruik G en 135 gebruik B. Party leerders gebruik meer as een kleur boek. 160 het slegs G gebruik, 30 het slegs B gebruik, 30 het G en B gebruik en 25 het R en G gebruik.

2.1 Stel die data in ‘n Venn-diagram voor.

2.2 Hoeveel leerders het:

2.2.1 geen van die boeke gebruik nie?

2.2.2 al die boeke gebruik?

2.2.3 slegs B en R gebruik?

2.2.4 slegs R gebruik?

2.3 Wat is die waarskynlikheid dat ‘n leerder wat ewekansig gekies is die volgende sal gebruik:

2.3.1 geen van die boeke nie?

2.3.2 al drie kleure boeke?

2.3.3 slegs B en R?

2.3.4 slegs R?

3 Laat S die aantal natuurlike getalle tussen 21 en 30 wees. Dus S = {21, 22, 23, ..., 30}. Laat K die stel priemgetalle tussen 21 en 30 wees, dus K = {23, 29}. Laat A die stel nie-priemgetalle tussen 21 en 30 wees, dus A = {21, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 30}.

Ons sien dat:

3.1 $P(K) = 2/10 = 1/5$

3.2 $P(A) = 8/10 = 4/5$

3.3 $P(K \text{ en } A) = 0$

3.4 $P(K) + (A) = 1/5 + 4/5 = 1$

Afhanklike en onafhanklike gebeurtenisse

As die voorkoms van een gebeurtenis nie die voorkoms van 'n ander gebeurtenis beïnvloed nie, is die gebeurtenisse onafhanklik.

As die voorkoms van een gebeurtenis die waarskynlikheid dat 'n ander gebeurtenis sal plaasvind, beïnvloed, is die gebeurtenisse afhanklik.

2.1 Reëls van waarskynlikheid

- Vermenigvuldigingsreël (onafhanklike gebeurtenisse):
  As P(A) en P(B) die waarskynlikheid dat gebeurtenisse A en B sal gebeur, voorstel, dan is die waarskynlikheid dat beide A en B sal gebeur P(A en B) = P(A) × P(B).
- Vermenigvuldigingsreël (afhanklike gebeurtenisse):
  As gebeurtenis B afhanklik is van gebeurtenis A, en as gebeurtenis B steeds na gebeurtenis A kan plaasvind, dan is die waarskynlikheid dat beide A en B sal gebeur P(A and B) = P(A) × P(B|A), waar P(B|A) die waarskynlikheid is dat B sal gebeur, indien A reeds gebeur het.
- Optelreël 1:
  As A en B twee onderling uitsluitende gebeure is en P(A) en P(B) stel die waarskynlikheid voor dat elkeen sal plaasvind, dan is die waarskynlikheid dat óf A óf B sal plaasvind, P(A of B) = P(A) + P(B).
- Optelreël 2:
  As A en B twee gebeure is wat nie onderling uitsluitend is nie, en P(A) en P(B) stel die waarskynlikheid voor dat elkeen sal plaasvind, dan is die waarskynlikheid dat óf A óf B sal plaasvind, P(A of B) = P(A) + P(B) – P(A) × P(B).

Voorbeeld 2

1 Brenda gooi eers 'n rooi dobbelsteen, en dan 'n groen dobbelsteen. Wat is die waarskynlikheid dat sy 'n 6 op die rooi dobbelsteen en 'n getal minder as 4 op die groen dobbelsteen sal gooi?

$P(6 \text{ op rooi}) = 1/6$ en $P(\text{minder as } 4 \text{ op groen}) = 3/6 = 1/2$

Dus, $P(6 \text{ op rooi en minder as } 4 \text{ op groen}) = 1/6 \times 1/2 = 1/12$

2 Gegee gebeurtenisse P en Q:

P(P) = 0,7 P(Q) = 0,2 P(P en Q) = 0,14

2.1 Is gebeurtenisse P en Q onderling uitsluitend? Verduidelik jou antwoord.
Nee, P(P en Q) is nie gelyk aan 0 nie.

2.2 Is gebeurtenisse P en Q onafhanklik? Verduidelik jou antwoord.
Ja, (P en Q) = P(P) × P(Q).

Boomdiagramme

Boomdiagramme staan ook as waarskynlikheidsbome bekend, omdat hulle die waarskynlikheid van ‘n kombinasie van gebeurtenisse aandui. Elke tak op die boom stel ‘n enkele kombinasie voor.

3.1 Boomdiagramme vir afhanklike gebeurtenisse

- Die verskil tussen boomdiagramme vir afhanklike gebeurtenisse en boomdiagramme vir onafhanklike gebeurtenisse is dat die waarskynlikheid van afhanklike gebeurtenisse sal verander, omdat die waarskynlikheid van die tweede gebeurtenis afhanklik is van die eerste gebeurtenis.

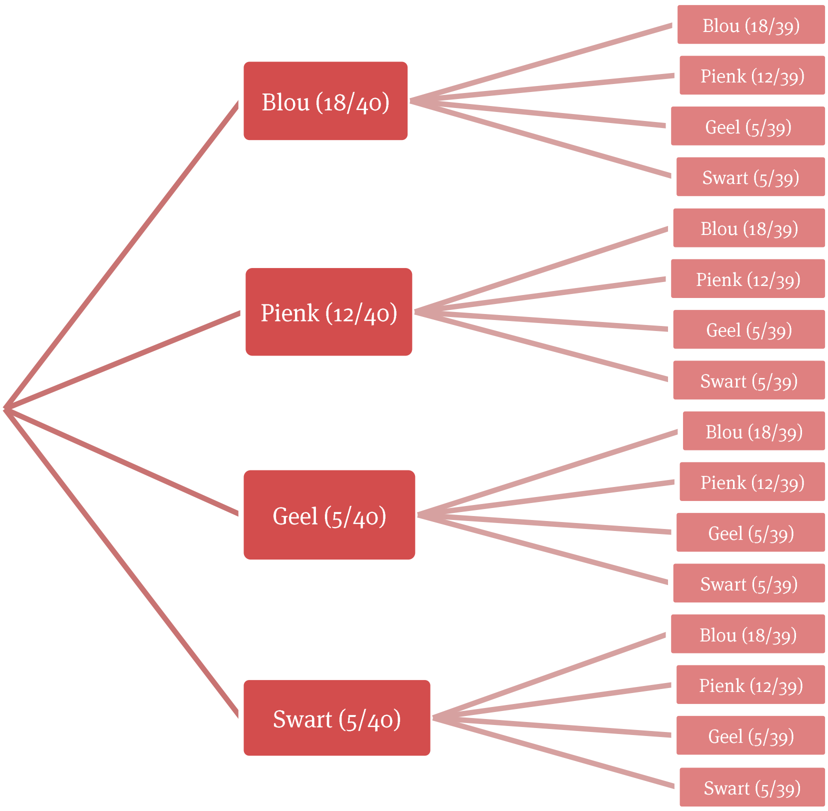
3.2 Gebeurlikheidstabelle

- Gebeurlikheidstabelle word nie gebruik om data in ‘n tabel op te stel nie. Die data kan van opnames van enige vorm verkry word.
- Wanneer die data in tabelvorm is, is dit maklik om te bereken of een veranderlike van ‘n ander een in die opname afhanklik is.
- Gebeurlikheidstabelle is veral nuttig wanneer ‘n opname oor mense in ‘n gemeenskap se menings oor iets wat gebeur het, of iets wat vir die gemeenskap beplan word, gemaak word.

Voorbeeld 3

1 Daar is 40 gekleurde balle, ewe groot en met dieselfde vorm, in ‘n sak. Daar is 18 blou, 12 pienk, 5 geel en 5 swart balle. Twee balle word uit die sak getrek, een na die ander, sonder om die eerste bal terug te sit voor die tweede een getrek word.

1.1 Teken 'n boomdiagram om die moontlike uitkomste te illustreer.



1.2 Wat is die waarskynlikheid om die volgende balle te trek? Rond jou antwoorde tot twee desimale plekke af.

1.2.1 'n blou en dan 'n pienk bal

P(blou dan pienk) = $18/40 \times 12/39 = 9/65 = 0{,}14$

1.2.2 twee pienk balle

P(twee pienk balle) = $12/40 \times 11/39 = 11/130 = 0{,}08$

1.2.3 'n geel en dan 'n swart bal

P(geel dan swart) = $5/40 \times 5/39 = 5/312 = 0{,}02$

2 'n Groep bejaardes is gevra of hulle die parkeerarea vir gestremdes by 'n winkelsentrum gebruik. Uit die 400 bejaardes was 35 gestremd en 365 was nie gestremd nie. Die resultate van die opname is in die tabel hieronder:

	Gestremd	**Nie gestremd**	**Totaal**
Gebruik parkering vir gestremdes	12	305	317
Gebruik nie parkering vir gestremdes	23	60	83
Totaal	35	365	400

Bereken die waarskynlikheid dat 'n persoon wat ewekansig uit die steekproef gekies is:

2.1 gestremd is

P(is gestremd) $= 35/400 = 0{,}09$

2.2 'n gestremde persoon is wat die parkering vir gestremdes gebruik

P(gestremd en gebruik parkering vir gestremdes) $= 12/400 = 0{,}03$

2.3 nie gestremd is nie en nie die parkering vir gestremdes gebruik nie

P(nie gestremd en gebruik nie parkering vir gestremdes) $= 60/400 = 0{,}15$

2.4 die parkering vir gestremdes gebruik en nie gestremd is nie.

P(gebruik parkering vir gestremdes) $\times$ P(is nie gestremd) $= 317/400 \times 365/400 = 0{,}72$

Rond jou antwoorde tot twee desimale plekke af.

Vrae

Vraag 1

Jy gooi 'n dobbelsteen en 'n muntstuk.

1.1 Wat is die steekproefruimte?

1.2 Wat is die waarskynlikheid dat jy die volgende sal gooi:

1.2.1 'n onewe getal en 'n munt?

1.2.2 'n priemgetal en kruis?

1.2.3 'n getal minder as vyf en 'n munt?

1.2.4 'n ewe getal en 'n kruis?

Vraag 2

'n Groep van 150 werknemers is gevra of hulle Microsoft Office Excel of OpenOffice.org Calc gebruik. 72 van hulle het gesê hulle gebruik Excel, 78 het gesê hulle gebruik Calc, en 15 het gesê hulle gebruik nie een van die twee nie.

2.1 Teken 'n Venn-diagram om hierdie inligting voor te stel.

2.2 Hoeveel werknemers het die volgende gebruik:

2.2.1 albei programme?

2.2.2 slegs Calc?

2.2.3 slegs Excel?

2.2.4 nie Excel of Calc nie?

2.3 Wat is die waarskynlikheid dat 'n werknemer wat ewekansig gekies is die volgende sal gebruik:

2.3.1 albei programme?

2.3.2 slegs Calc?

2.3.3 slegs Excel?

2.3.4 nie Excel of Calc nie?

Vraag 3

'n Vyfkantige dobbelsteen word gegooi. Wat is die waarskynlikheid dat dit op die volgende getalle sal land:

3.1 'n getal kleiner as 4?

3.2 'n getal groter as 4?

3.3 'n getal groter as of gelyk aan 4?

3.4 'n getal wat deelbaar is deur 3?

3.5 'n getal wat nie deelbaar is deur 3 nie?

3.6 Wat kan jy oor die datastelle in 3.4 en 3.5 en die stelle in 3.1 en 3.3 sê?

Vraag 4

'n Sportklub het vir die lede gevra watter sportsoort hulle verkies. Daar is 250 lede in die klub, waarvan:

180 van rugby hou (R)

95 van sokker hou (S)

40 van korfbal hou (K)

70 van rugby en sokker hou

16 van al drie sporte hou

5 van sokker en korfbal hou

235 van rugby of sokker of korfbal hou

4.1 Teken 'n Venn-diagram gebaseer op die gegewe inligting.

4.2 Hoeveel lede hou nie van een van die drie sportsoorte nie?

4.3 Hoeveel lede hou van korfbal en sokker, maar nie rugby nie?

4.4 Wat is die waarskynlikheid dat 'n lid van die klub wat ewekansig gekies is van ten minste twee van die sportsoorte hou?

Vraag 5

Die waarskynlikheid dat 'n gebeurtenis sal plaasvind is 2/5, die waarskynlikheid dat gebeurtenis B sal plaasvind is 5/12 en die waarskynlikheid dat gebeurtenis C sal plaasvind is 1/3. Wat is die waarskynlikheid dat:

5.1 A of C sal plaasvind?

5.2 Nie A of B sal plaasvind nie?

Vraag 6

Die waarskynlikheid vir reën in Port Louis, die hoofstad van Mauritius, is 95% in Februarie. Die waarskynlikheid van 'n fees in droë weer is 32% gedurende Februarie, en een-en-'n-half keer meer moontlik as dit nat is.

6.1 Teken 'n boomdiagram om alle moontlike gebeurtenisse en hulle waarskynlikheid uit te beeld.

6.2 Wat is die waarskynlikheid dat:

6.2.1 daar 'n fees sal wees?

6.2.2 daar nie 'n fees in nat weer sal wees nie?

Vraag 7

'n Opname is onder 4 895 mense gedoen om te bepaal of die drink van meer as 5 koppies koffie per dag van geslag afhanklik is. Hulle antwoorde word hieronder gegee.

	Meer as 5 koppies	**Minder as 5 koppies**	**Totaal**
Vroulik	(a)	1 565	(b)
Manlik	1 485	(c)	2 658
Totaal	2 157	(d)	4 895

7.1 Voltooi die tabel.

7.2 Wat is die waarskynlikheid dat:

7.2.1 'n vrou meer as 5 koppies koffie per dag sal drink?

7.2.2 'n persoon vroulik sal wees?

7.2.3 'n persoon 'n been sal breek?

7.3 Bepaal of die drink van meer as vyf koppies koffie per dag van geslag afhanklik is. Ondersteun jou antwoord met toepaslike berekeninge, afgerond tot twee desimale plekke.

Vraag 8

‘n Motorvervaardiger bied twee soorte ratkasse in sy beginnersklasmodel – ouotomaties (OT) of handgedrewe (HG). Kopers kan kies tussen petrol-(P), diesel- (D) of ‘n hibried-(H) enjin, en die motors het die volgende kleure: rooi (R), silwer (S) of swart (Sw).

8.1 Teken ‘n boomdiagram om al die moontlike opsies aan te dui.

8.2 Wat is die waarskynlikheid dat ‘n motor wat ewekansig gekies is:

8.2.1 swart is?

8.2.2 ‘n outomatiese motor met ‘n hibriedenjin is?

8.2.3 ‘n handgedrewe motor met ‘n dieselenjin en rooi is?

8.2.4 ‘n petrolenjin het en silwer is?

Statistiek

Oorsig

Statistiek is die studie van inligting of data en die ontleding en vertolking daarvan om ingeligte besluite te neem. Ingeligte besluite is beter besluite, en is veral nuttig wanneer jy geld in die aandelebeurs wil belê.
In hierdie hoofstuk gaan jy leer van histogramme, wat gebruik word om gegroepeerde data en frekwensieveelhoeke voor te stel, en ogiewe wat gebruik word om kumulatiewe frekwensie voor te stel. Jy sal ook die variansie en standaardafwykings wat gebruik word om die spreiding van data te beskryf, verken, en leer om uitskieters te identifiseer.

Hier is 'n vinnige terugblik op wat jy alreeds weet:

Ongegroepeerde data	Gegroepeerde data
Maatstawwe van ligging (gemiddelde, mediaan, modus)	Maatstawwe van ligging
Maatstawwe van dispersie (variasiewydte, kwartiele, persentiele en desiele, interkwartielvariasiewydte,	Die geskatte gemiddelde, die modale klas, die klas wat die mediaan bevat
semi-interkwartielvariasiewydte)	
Vyfgetal-opsomming	

Histogramme

- n Histogram is 'n grafiese voorstelling van gegroepeerde data. Dit bestaan uit stawe, soos 'n staafgrafiek, maar daar is geen gapings tussen die stawe van 'n histogram nie.
- Die wydte van 'n staaf van 'n histogam is gelyk aan die wydte van 'n klasinterval, en die hoogte van 'n staaf kom ooreen met die frekwensie in daar die klasinterval.
- Klasintervalle het gewoonlik dieselfde lengte, met 'n boonste en onderste grens, en die middelpunt van die klasinterval word die klaspunt genoem.
- Die **modale klas** word deur die hoogste staaf voorgestel.
- Die **mediaan** sal binne een van die klasintervalle val.

Hoe om 'n histogram te teken:

1. Teken 'n stel asse, met die klasintervalle aangedui op die horisontale as.
2. Merk gelyke intervalle op die vertikale as, en maak seker dat die vertikale as die hoogste frekwensie (soos in die frekwensietabel aangedui) sal kan insluit.
3. Teken die stawe om ooreen te stem met die frekwensies (soos gelees van die frekwensietabel) van die laagste tot die boonste grens van die klasinterval, en kleur die staaf in. Onthou, die hoogte van die stawe moet met die frekwensies in die klasintervalle ooreenstem.

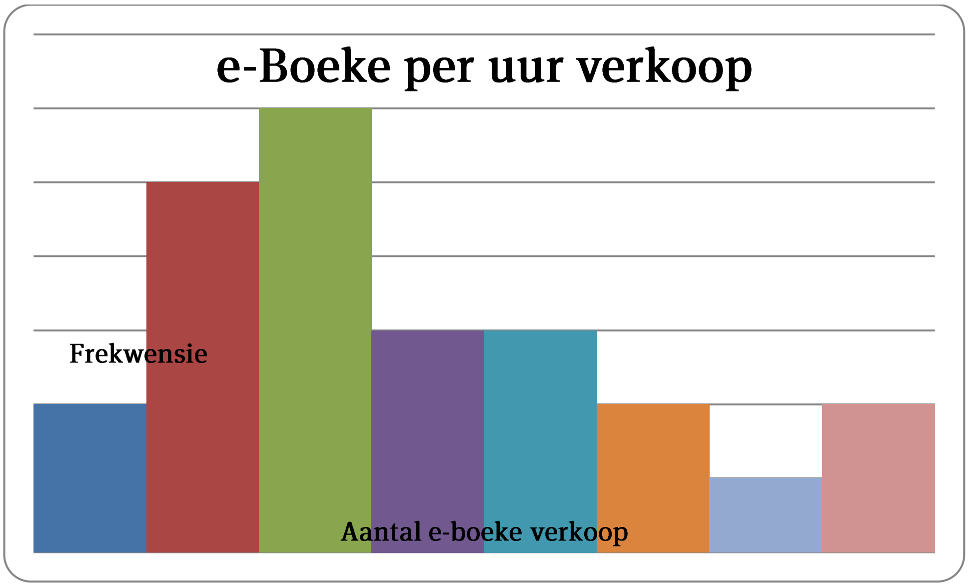
Voorbeeld 1

Die aantal e-boeke wat per uur op 'n internetwinkel se webblad verkoop word oor 'n tydperk van 1 dag, is as volg opgeteken: 2, 9, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 20, 21, 24, 25, 27, 36, 37, 38, 45, 47, 48, 56, 58, 63, 72, 75.

Die volgende frekwensietabel stel hierdie data voor:

e-Boeke per uur verkoop	$0 \leq x < 10$	$10 \leq x < 20$	$20 \leq x < 30$	$30 \leq x < 40$	$40 \leq x < 50$	$50 \leq x < 60$	$60 \leq x < 70$	$70 \leq x < 80$
Frekwensie	2	5	6	3	3	2	1	2

1 Teken 'n histogram om die data voor te stel.



2 Bepaal die modale klas.

Die modale klas word deur die hoogste staaf voorgestel. Die modale klas is dus $20 \leq x < 30$.

3 Bepaal die klas wat die mediaan bevat.

Daar is 24 datapunte in totaal. Die mediaan is dus die gemiddelde van die 12de en 13de waardes. Dit beteken dat die 12de en 13de datawaardes in die derde interval lê, $20 \leq x < 30$.

Frekwensieveelhoeke

'n Frekwensieveelhoek is 'n gebrokelyn-grafiek wat gebruik word om gegroepeerde data voor te stel. Ons teken 'n frekwensieveelhoek deur met 'n histogram te begin en al die klaspunte aan die bokant van die stawe met reguit lyne te verbind. Onthou om jou frekwensieveelhoek aan elke kant van die histogram te anker.

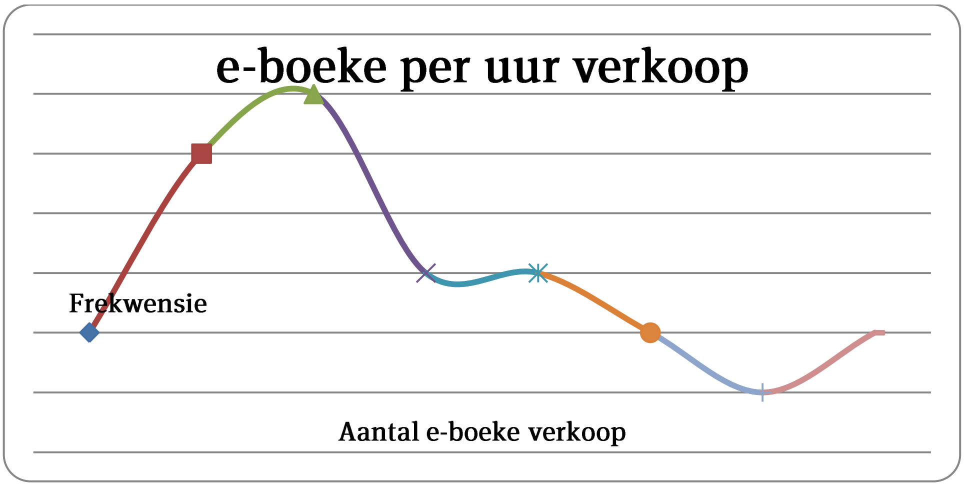
Dit is ook moontlik om 'n frekwensieveelhoek sonder die hulp van 'n histogram te teken. Ons doen dit as volg:

1. Gebruik die frekwensietabel om die klaspunt vir elke klasinterval te breken.
2. Teken 'n stel asse vir die data, en dui elkeen van die frekwensies wat met die klasinterval ooreenstem daarop aan.
3. Verbind die punte om die frekwensieveelhoek te skep.
4. Onthou om jou frekwensieveelhoek aan albei kante te anker.

Voorbeeld 2

Teken 'n frekwensieveelhoek vir die datastel in Voorbeeld 1 van Hoofstuk 12.

e-Boeke per uur verkoop	Klaspunt	Frekwensie
$0 \leq x < 10$	5	2
$10 \leq x < 20$	15	5
$20 \leq x < 30$	25	6
$30 \leq x < 40$	35	3
$40 \leq x < 50$	45	3
$50 \leq x < 60$	55	2
$60 \leq x < 70$	65	1
$70 \leq x < 80$	75	2



Ogiewe

’n Ogief is ’n grafiek wat kumulatiewe frekwensie voorstel. ’n Ogief word ook ’n kumulatiewe frekwensiegrafiek genoem.

Die kumulatiewe persentasie word op die vertikale as gebruik, en daarmee kan ons nuttige maatstawwe vind, soos die mediaan. Ons kan ook ‘n ogief gebruik om kwartiele te lees, om ‘n houer-en-puntstipping te konstrueer en om persentasies te lees.

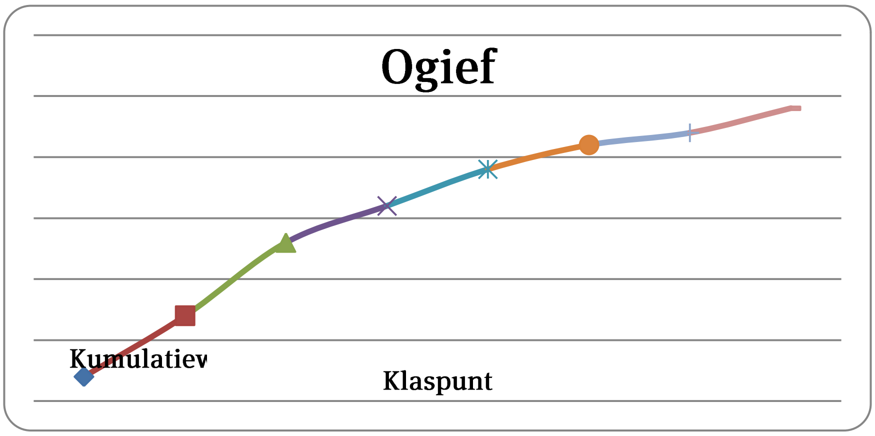
Hoe om ‘n ogief te teken:

1. Gebruik die frekwensietabel om ‘n kumulatiewe frekwensietabel te konstrueer.
2. Bereken die koördinate vir die punte wat gestip moet word: die boonste grens van elke interval teen die kumulatiewe frekwensie.
3. Verbind die punte met ‘n egalige kromme, voeg ’n interval links van die eerste een by en verbind die ogief met die horisontale as.

Voorbeeld 3

Teken ‘n ogief vir die datastel in Voorbeeld 1 van Hoofstuk 12.

Klasintervalle	Frekwensie	Kumulatiewe frekwensie	Punte om te stip
$0 \leq x < 10$	2	2	(10; 2)
$10 \leq x < 20$	5	7	(20; 7)
$20 \leq x < 30$	6	13	(30; 13)
$30 \leq x < 40$	3	16	(40; 16)
$40 \leq x < 50$	3	19	(50; 19)
$50 \leq x < 60$	2	21	(60; 21)
$60 \leq x < 70$	1	22	(70; 22)
$70 \leq x < 80$	2	24	(80; 24)



Variansie en standaardafwyking van ongegroepeerde data

Wanneer ons 'n akkurate beskrywing van die spreiding van data nodig het, kyk ons hoe die individuele items van die gemiddelde afwyk.

Omdat die som van die verskille 0 is, gebruik ons die kwadraat van die afwykings en bereken die variansie, (s^2): $s^2 = (\Sigma(x_i - \bar{x})^2)/n$

Hierdie statistiek is baie nuttig, maar ons kan dit nie direk gebruik nie, want die eenhede is nie dieselfde as in die steekproefdata nie. Om hierdie probleem aan te spreek, neem ons die vierkantswortel van die variansie om die standaardafwyking te bereken: (s): $s = \sqrt{s^2}$

As die standaardafwyking klein is, beteken dit dat die waardes rondom die gemiddelde saamgebondel is. As die standaardafwyking groot is, beteken dit dat die waardes vêr weg van die gemiddelde versprei is.

Wanneer 'n datastel normaal versprei is, kan ons sê dat:

- 68% van die waardes lê in een standaardafwyking.
- 95% van die waardes lê in twee standaardafwykings.
- 99,7% van die waardes lê in drie standaardafwykings.

Voorbeeld 4

Bereken die variansie en die standaardafwyking van die volgende datastel:

15; 21; 1; 9; 5; 13; 19; 7

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
15	3,75	14,0625
21	9,75	95,0625
1	-10,25	105,0625
9	-2,25	5,0625
5	-6,25	39,0625
13	1,75	3,0625
19	7,75	60,0625
7	-4,25	18,0625
$n = 8$, $= 90/8 = 11{,}25$		$\Sigma = 339{,}5$

$s^2 = \frac{339{,}5}{8} = 42{,}4375$

$s = \sqrt{s^2} \quad = \sqrt{42{,}4375}$

$= 6{,}51$

Gebruik jou sakrekenaar om die standaardafwyking te bereken

Veronderstel dat ons die volgende klein datastel het:

10, 12, 14, 15, 18, 21.

Om die standaardafwyking met 'n Sharp EL531WH sakrekenaar te bereken(dit is die sakrekenaar wat die meeste leerders gebruik, maar die proses is dieselfde met ander sakrekenaars):

Druk	**Jy sal sien**
Mode 1 0	STAT 0
10 DATA	Data set 1
12 DATA	Data set 2
14 DATA	Data set 3
15 DATA	Data set 4
18 DATA	Data set 5
21 DATA	Data set 6
RCL n	6
RCL $\bar{x}$	$\bar{x} = 15$
RCL sx	$sx = 4$
RCL σx	$\sigma x = 3{,}6515$
RCL Σx	$\Sigma x = 90$

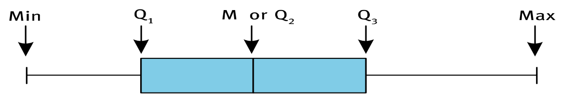
Let daarop dat sx die standaardafwyking van 'n steekproef en σx die standaardafwyking van 'n populasie is.

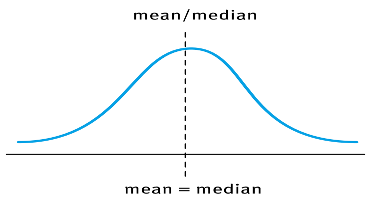
Simmetriese en skewe data

’n Verspreiding is skeef as een van sy sterte (van die mediaan na die punt) langer as die ander een is. Dit kan grafies op ’n houer-en-punt-stipping of frekwensieveelhoek aangedui word.

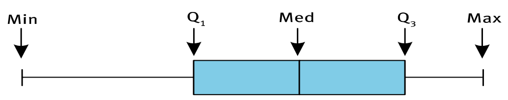
Daar is drie verskillende moontlikhede wat jy moet onthou:

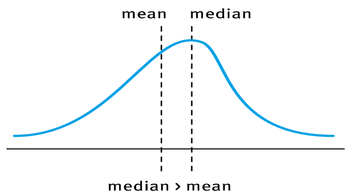
1 Die data is simmetries om die mediaan. Dit beteken dat die gemiddelde gelyk is aan die mediaan.



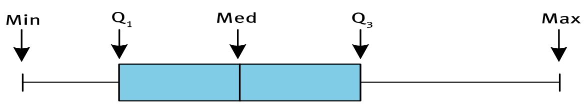


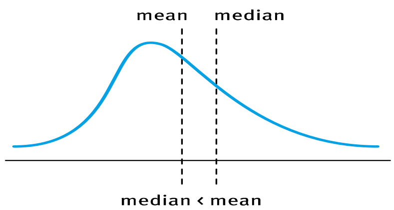
2 Die data is skeef na links of negatief skeef. Dit beteken dat die gemiddelde kleiner is as die mediaan.





3 Die data is skeef na regs of positief skeef. Dit beteken dat die gemiddelde groter is as die mediaan.



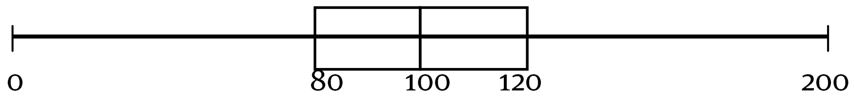


Wanneer data grafies voorgestel word, is dit makliker om die waardes wat nodig is om die data te ontleed, af te lees.

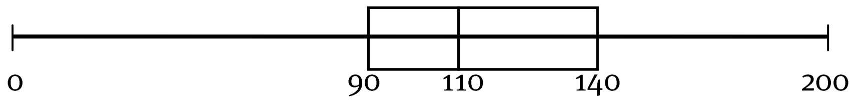
Voorbeeld 5

Die houer-en-puntstipping van twee stelle data (A en B) word in die volgende diagramme getoon, met al die nodige datawaardes.

Datastel A:



Datastel B:



1 Watter datastel is meer simmetries?

Datastel A is meer simmetries.

2 Watter datastel het die groter interkwartiel variasiewydte?

Datastel B het die grootste interkwartiel variasiewydte.

3 Vir die skewe datastel, dui aan of dit skeef na links of skeef na regs is.

Datastel B is skeef na links.

Identifiseer van uitskieters

- Wanneer data ingesamel of ontleed word, is dit maklik vir die persoon wat die data aanteken om ‘n fout te maak. ‘n Fout kan ook insluip wanneer die data op rekenaar vasgelê word vir latere ontleding.
- Uitskieters is uiterste waardes (dit verskil baie van die res van die waardes) wat korrek kan wees, of foutief kan wees as gevolg van ‘n aantekeningsfout.
- Ons identifiseer gewoonlik uitskieters deur data grafies voor te stel. Die mees algemene manier is met ‘n spreidingsdiagram.
- Spreidingsdiagramme dui die verspreiding van tweeveranderlike data aan, en kan een van verskeie vorms aanneem. Vir ons doeleindes sal die meeste spreidingsdiagramme punte hê wat ‘n patroon (of neiging) vorm, wat soos ‘n reguitlyn lyk. Ons kan ‘n “lyn wat die beste pas” deur hierdie data trek deur ‘n reguit lyn deur soveel as moontlik van die punte te trek, met (so ver as moontlik) net soveel punte bokant die lyn as daaronder. Die lyn wat die beste pas kan gebruik word om toekomstige waardes vir die datastel te voorspel.
- Die *houer-en-punt-stipping* is nog ’n diagram wat ons kan help om uitskieters te identifiseer. Hier definieer ons ’n uitskieter as enige waarde groter (of kleiner) as 1,5 maal die interkwartielvariasiewydte.

Voorbeeld 6

Gaan die volgende datastelle na vir uitskieters:

1 25, 28, 33, 35, 41, 62

Min = 25 $Q_1 = 26{,}5$ Mediaan = $(33 + 35)/2 = 34$

$Q_3 = 51{,}5$ Maks = 62

Interkwartielvariasiewydte = $51{,}5 - 26{,}5 = 25$ $1{,}5 \times 25 = 37{,}5$

Dus, enige lesing onder $26{,}5 - 37{,}5 = -11$

of enige lesing bo $51{,}5 + 37{,}5 = 89$ is ‘n uitskieter.

$\therefore$ Hierdie datastel het nie uitskieters nie.

2 11, 45, 48, 50, 51, 52, 53, 59, 62, 64, 69

Min = 11 $Q_1 = 48$ Mediaan = 52

$Q_3 = 62$ Maks = 69

Interkwartielvariasiewydte = $62 - 48 = 14$ $1{,}5 \times 14 = 21$

Dus, enige lesing onder $48 - 21 = 27$

of enige lesing bo $62 + 21 = 83$ is ‘n uitskieter.

$\therefore$ 11 is ‘n uitskieter in hierdie datastel.

3 1, 3, 5, 29, 32, 35, 38, 41, 89, 92, 96, 102

Min = 1 Q1 = 5 Mediaan = 36,5

Q3 = 92 Maks = 102

Interkwartielvariasiewydte = 92 – 5 = 871,5 × 87 = 130,5

Dus, enige lesing onder 5 – 130,5 = -125,5

of enige lesing bo 102 + 130,5 = 232,5 is 'n uitskieter.

∴ Hierdie datastel het nie uitskieters nie.

Vrae

Vraag 1

Om die Wiskundige Geletterdheidsvlakke onder jongmense te verhoog het die Departement van Onderwys 50 twintigjariges se vaardighede getoets. Hulle het toe 'n kursus bygewoon, en na die kursus is hulle vaardighede weer getoets. Na die kursus was hulle punte (in persentasievorm):

15, 17, 19, 26, 28, 35, 39, 41, 41, 42, 45, 45, 45, 45, 47, 52, 53, 54, 57, 59, 55, 60, 61, 62, 63, 64, 65, 66, 67, 68, 69, 68, 67, 72, 75, 74, 78, 81, 82, 82, 82, 82, 82, 82, 91, 95, 92, 99, 98, 94

1.1 Stel hierdie data in 'n frekwensietabel met intervalle van 10 voor.

1.2 Gee die modus.

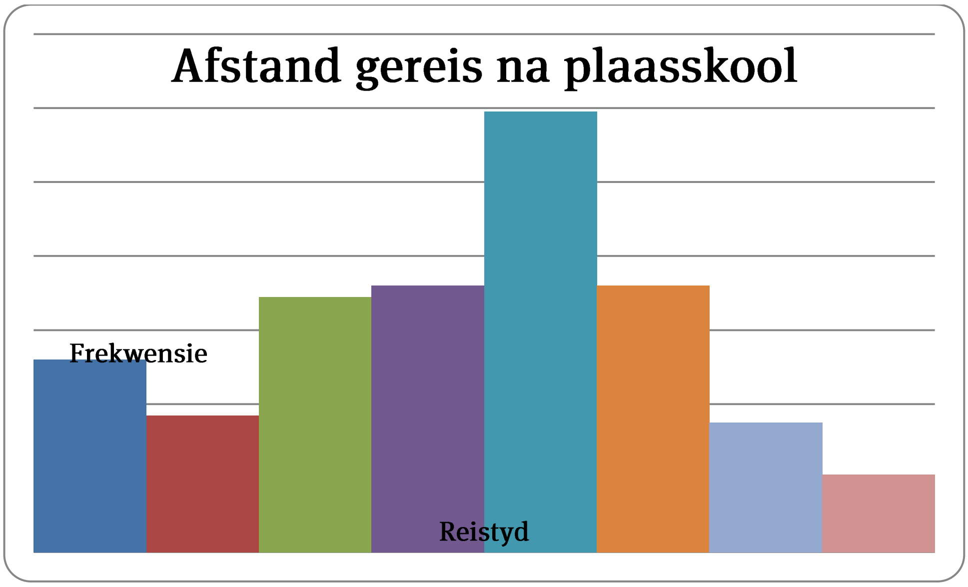
1.3 In watter klas sal die mediaan wees?

1.4 Teken 'n histogram van die data.

1.5 Konstrueer 'n frekwensieveelhoek op die histogram.

Vraag 2

'n Opname is by 'n klein plaasskool gedoen om vas te stel hoe ver leerders daagliks skool toe moet reis. Die histogram hieronder stel die resultate van die opname voor:



2.1 Bereken die geskatte gemiddelde reistyd deur die frekwensietabel te gebruik.

2.2 Gee die modale klas.

2.3 Teken 'n frekwensieveelhoek.

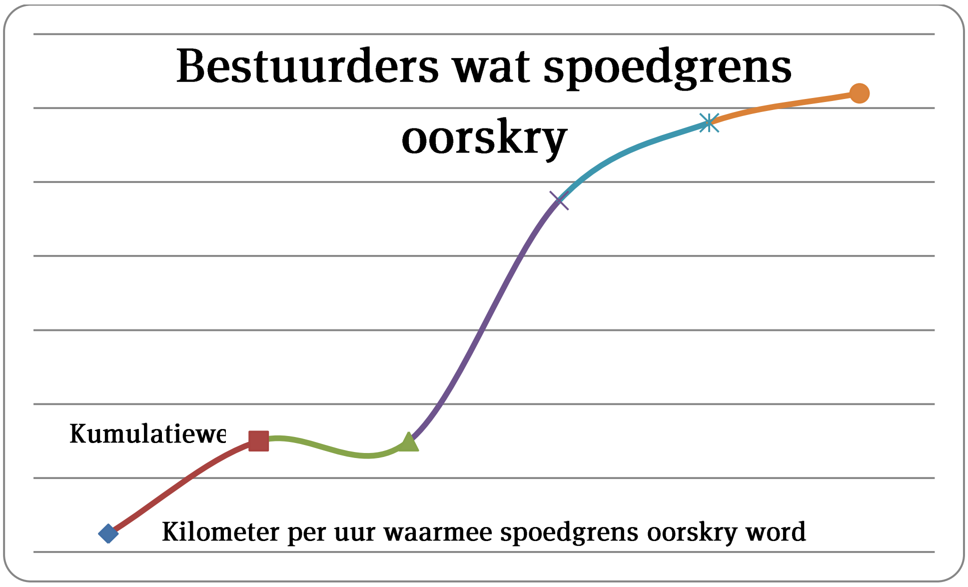
Vraag 3

Stel die volgende data in 'n ogief voor. Wys hoe jy die ogief sal gebruik om die mediaan, onderste en boonste kwartiele af te lees.

Interval	Frekwensie
$10 \leq x < 20$	23
$20 \leq x < 30$	37
$30 \leq x < 40$	45
$40 \leq x < 50$	88
$50 \leq x < 60$	52
$60 \leq x < 70$	16
$70 \leq x < 80$	12

Vraag 4

'n Ogief wat aandui hoeveel bestuurders die spoedgrens oorskry, en met hoeveel kilometer per uur hulle dit oorskry, word hieronder gegee.



4.1 Hoeveel bestuurders oorskry die spoedgrens?

4.2 Hoeveel bestuurders oorskry die spoedgrens met meer as 20km/h?

4.3 Konstrueer 'n kumulatiewe frekwensietabel vir die gegewe data.

Vraag 5

Bereken die variansie en standaardafwyking vir die volgende datastel:

155, 142, 169, 133, 189, 128, 175, 168, 135

Vraag 6

'n Opname is gedoen van die gewig van 10 000 volwasse vroulike koi visse in broeitenke. Die gemiddelde gewig van 'n volwasse vroulike koi vis was 7,5 kg, met 'n standaardafwyking van 2 kg.

6.1 Hoeveel van die visse het tussen 5,5 kg en 9,5 kg geweeg?

6.2 Hoeveel het minder as 3,5 kg geweeg?

6.3 Watter persentasie van die koi het meer as 15,5 kg geweeg?

6.4 Het enige van die koi meer as 20 kg geweeg? Indien wel, hoveel?

Vraag 7

Die gemiddelde uurlikse tarief waarvoor 'n Wiskunde-redigeerder werk, is R280 met 'n standaardafwyking van R58. 'n Besigheidstudies-redigeerder vra R230 met 'n standaardafwyking van R23, en 'n Kuns en Kultuur-redigeerder vra R180 met 'n standaardafwyking van R69. 'n Wiskunde-redigeerder vra R350 per uur, 'n Besigheidstudies-redigeerder vra R195 per uur, en 'n Kuns en Kultuur-redigeerder R210 per uur. Watter redigeerder is relatief duurder?

Vraag 8

'n Groep student-boekhouers word getoets met die tyd wat dit hulle neem om 3 000 woorde te tik. Hulle tye, in sekondes, is:

125, 99, 134, 149, 138, 124, 133, 146, 117, 137

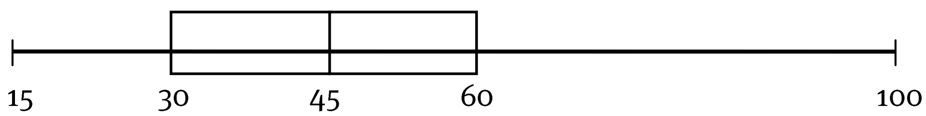
8.1 Bereken die gemiddelde tyd wat dit neem om 3 000 woorde te tik.

8.2 Bereken die standaardafwyking van die tyd wat dit neem om 3 000 woorde te tik.

8.3 Hoeveel van die student-boekhouers het die 3 000 woorde binne twee standaardafwykings van die gemiddeld voltooi?

Vraag 9

Kyk na die houer-en-puntstipping hieronder.



9.1 Skryf die vyfgetal-opsomming neer.

9.2 Bepaal die semikwartiel-variasiewydte.

9.3 Lewer kommentaar oor die verspreiding van die data. Watter tipe data, dink jy, kan dit voorstel?

9.4 Lewer kommentaar oor die skeefheid van d ie data.

Vraag 10

Teken spreidingsdiagramme vir die volgende stelle pare. Dui enige uitskieters aan.

10.1

x	3	2	5	1	4	6	8	5	4	5	4	5
y	1	2	3	2	1	2	3	2	1	2	3	2

10.2

x	4	2	5	8	1	2.5	5	6	8.5	2	9	4
y	1	1	1	0	0	0	3	7	2	9	5	0

10.3

x	1	5	2	3	6	4	5	6	2	3	1	2
y	3	6	9	5	6	9	3	5	6	9	6	5

WISKUNDEVRAESTEL 1

Punte: 150 **Tyd: 3 uur**

INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies noukeurig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1 Hierdie vraestel bestaan uit 7 vrae. Beantwoord AL die vrae.
2 Wys AL die bewerkings, diagramme, grafieke, ensovoorts wat jy gebruik het om die vrae te beantwoord DUIDELIK.
3 'n Goedgekeurde wetenskaplike sakrekenaar (nie-programmmeerbaar en nie-grafies) kan gebruik word, tensy anders aangedui.
4 Antwoorde moet tot TWEE desimale plekke afgerond word, tensy anders aangedui.
5 Nommer jou antwoorde volgens die nommersisteem wat in hierdie vraestel gebruik is.
6 Diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
7 Dit is vir jou eie beswil om leesbaar (duidelik) te skryf en jou werk netjies aan te bied.

VRAAG 1

1.1 Los op vir x in elk van die volgende:

1.1.1 $9x(x - 6) = 15$

1.1.2 $x^2 - 4x \geq -4$

1.1.3 $1/2\, x^2 - 17x = 5$

1.2 Kyk na die vergelyking: $1/(x - 9) + 2 = 3x/(9 - x)$

1.2.1 Hoekom is $x \neq 9$?

1.2.2 Kan $x = 3^2$?

1.2.3 Los die vergelyking op.

1.3 Los op vir x en y in die sisteme hieronder:

1.3.1 $2x + 2y = 2$ en $2x^2 + 4y^2 = 4$

1.3.2 $4x^2 + 6y - 5 = 0$ en $2x^2 - 7y = 15y$

1.4 Sibusiso hou hoenders in 'n reghoekige hoenderhok in sy ouers se agterplaas aan. Die hok het 'n vloeroppervlak van 20 m^2. Hy wil die hok groter maak om die hoenders meer gemaklik te maak. Hy vergroot die breedte met 'n faktor van 1,2 en hy verdriedubbel die lengte.
Met watter faktor het die oppervlakte van die hoenderhok vergroot?
Wat is die omtrek van die nuwe grootte van die hoenderhok?
(Wenk: laat die breedte van die oorspronklike hoenderhok x wees, en die lengte y.)

VRAAG 2

2.1 Vereenvoudig die volgende:

2.1.1 $(4x)^{-3}/4x^{-2}$

2.1.2 $\sqrt[3]{512x^{15}} + \sqrt[3]{27x^{15}}$

2.1.3 $\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{10}) - \sqrt{4}$ (Los jou antwoord in die eenvoudigste wortelvorm)

2.2 Los op vir x:

2.2.1 $4.4^x = 1\,024$

2.2.2 $7^x - 7^{x+1} = -42$

2.2.3 $2.3^{-x} = 54$

VRAAG 3

3.1 Kyk na die volgende patrone van sirkelvormige klippies

5 14 27

3.1.1 Hoeveel klippies is in die volgende rangskikking?

3.1.2 Hoeveel klippies is daar in die *n*de rangskikking?

3.1.3 Hoeveel klippies is daar in die 16de rangskikking?

3.1.4 Watter rangskikking het 779 klippies?

3.2 Kyk na die ry: 1; *a*; 13; *b*; 33. Die ry het 'n konstante tweede verskil van 2.

3.2.1 Bepaal die waardes van *a* en *b*.

3.2.2 Bereken die *n*de term (algemene term) van die ry.

VRAAG 4

4.1 Fazeela wil haar eie bemarkingsmaatskappy begin en sy besluit om 'n groot drukker te koop om aan haar kliënte 'n diens te kan verskaf. Die drukker kos R350 000.

4.1.1 Haar vennoot, Mohammed, sê dat die drukker se waarde teen 18% per jaar verminder op 'n reguitlyn-basis. Hoe lank sal dit neem voordat sy die toerusting moet afskryf?

4.1.2 Fazeela se boekhouer dink dat sy die toerusting se waarde teen 25% per jaar moet verminder op 'n afnemende balansbasis en dit na vier jaar moet verkoop. Bereken die waarde van die drukker na vier jaar, en gee jou antwoord korrek tot die laaste sent.

4.2 Kyk na die twee lenings hieronder. Bereken watter lening jou oor 'n lang tydperk minder sal kos. Regverdig jou antwoord deur al jou bewerkinge te wys.
Lening 1: 12% per jaar, halfjaarliks saamgestel, of
Lening 2: 10% per jaar, kwartaalliks saamgestel.

4.3 Danie erf R78 000 en besluit om die erfgeld teen 'n rentekoers van 12% per jaar, maandeliks saamgestel, te belê, sodat hy albei sy kinders universiteit toe kan stuur. Retha, sy dogter, begin presies twee jaar later met universiteit, en hy onttrek R65 000 om vir haar eerste jaar se studies te betaal.
Nadat hy die geld onttrek het, verander die rentekoers na 8% per jaar, kwartaalliks saamgestel, en die geld word vir nog drie jaar teen hierdie koers belê. Na die drie jaar verander die rentekoers na 19% per jaar, halfjaarliks saamgestel, vir nog twee jaar.
Hoeveel geld sal Danie beskikbaar hê om vir sy seun se universiteitstudies te betaal aan die einde van die beleggingsperiode?

VRAAG 5

Gegee die funksies $f(x) = -3/4\ (x + 3)^2 - 6$ en $g(x) = 3x + 4$:

5.1 Skryf die koördinate van die draaipunt van f neer.

5.2 Bereken die wortels van die vergelyking f(x) = 0.

5.3 Skryf die vergelyking van die simmetrie-as van f neer.

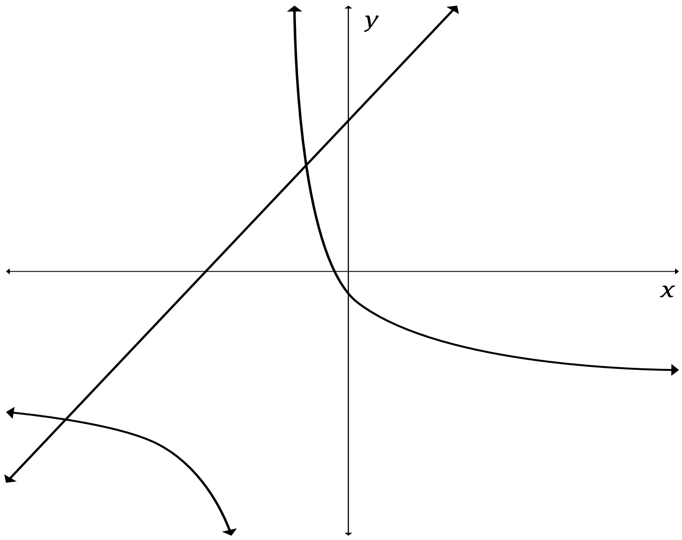
5.4 Skets die grafieke van y = f(x) en y = g(x) op dieselfde stel asse.

5.5 Bepaal die vergelyking van h(x) verkry deur f(x) drie eenhede na regs te skuif.

5.6 Bepaal die vergelyking van k(x) verkry deur g(x) een eenheid na bo en twee eenhede na regs te skuif.

VRAAG 6

Hieronder is die grafieke van $r(x) = 5/(x + 2) - 3$ en $s(x) = x + 4$.



6.1 Bepaal die koördinate van A en B.

6.2 Skryf die vergelyking vir die horisontale asimptoot van r(x) neer.

6.3 Skryf die definisieversameling van r(x) neer.

6.4 Bereken die koördinate van die punt waar r(x) en s(x) sny.

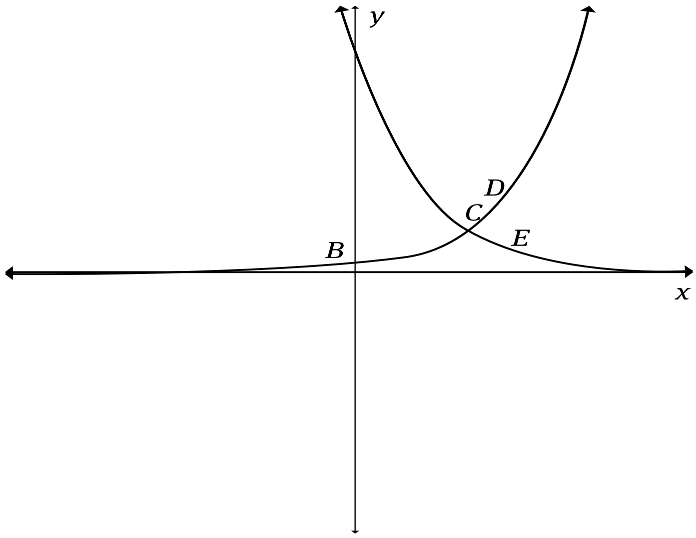
6.5 Skryf die nuwe vergelyking neer as s(x) op die x-as gereflekteer is.

6.6 Skryf die nuwe vergelyking neer as r(x) op die y-as gereflekteer is.

6.7 Bepaal die koördinate van H waar GH loodreg met die x-as is.

VRAAG 7

Die funksies van $m(x) = 3^{x-2}$ en $n(x) = 3^{1-x}$ is hieronder geskets.
A en B is snypunte van die twee grafieke met die y-as.
C is die snypunt van die twee grafieke.
DEF is parallel tot die y-as met D en E op die twee grafieke.



7.1 Bepaal die lengte van AB.

7.2 Gegee dat OF = 2 eenhede, bepaal die gemiddelde gradiënt tussen die punte.

7.2.1 A en E

7.2.2 B en D

7.2.3 Bepaal dan watter kromme steiler is: $x = 0$ of $x = 2$?

7.3 Bepaal die koördinate van C.

WISKUNDEVRAESTEL 2

Punte: 150 **Tyd: 3 uur**

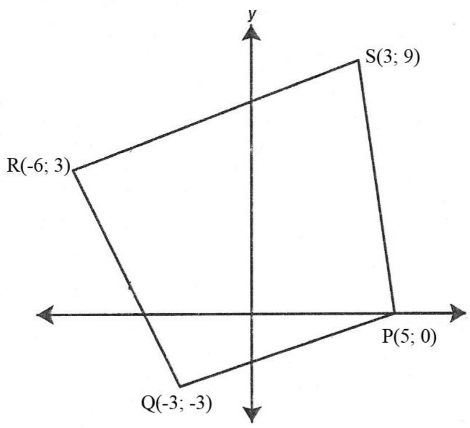
INSTRUKSIES EN INLIGTING

Lees die volgende instruksies noukeurig deur voordat jy die vraestel beantwoord:

1 Hierdie vraestel bestaan uit 7 vrae. Beantwoord AL die vrae.
2 Wys AL die bewerkings, diagramme, grafieke, ensovoorts wat jy gebruik het om die vrae te beantwoord DUIDELIK.
3 'n Goedgekeurde wetenskaplike sakrekenaar (nie-programmmeerbaar en nie-grafies) kan gebruik word, tensy anders aangedui.
4 Antwoorde moet tot TWEE desimale plekke afgerond word, tensy anders aangedui.
5 Nommer jou antwoorde volgens die nommersisteem wat in hierdie vraestel gebruik is.
6 Diagramme in die vraestel is nie noodwendig volgens skaal geteken nie.
7 Dit is vir jou eie beswil om leesbaar (duidelik) te skryf en jou werk netjies aan te bied.

VRAAG 1

P(5; 0), Q(-3; -3), R(-6; 3) en S(3; 9) is die vlakke van 'n vierhoek op die Kartesiese vlak.



Bepaal:

1.1 Die gradiënt van RQ.
1.2 Die vergelyking van RQ.
1.3 Is RQ parallel tot SP? Wys al jou berekeninge.
1.4 Die inklinasie van PQ.

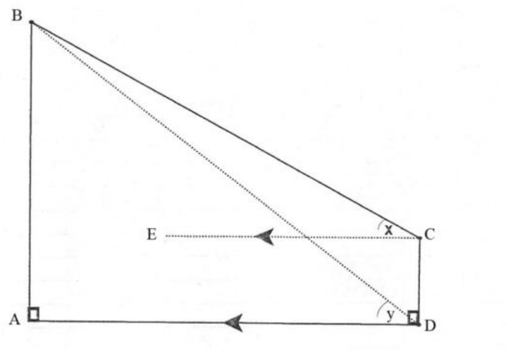
VRAAG 2

Die vlakke van 'n driehoek op die Kartesiese vlak is A(-2; -2), B(4; 5) en C(4; 2). CD ⊥ AB.

2.1 Bepaal die lengte van BC.
2.2 Bepaal die vergelyking van CD.
2.3 Watter tipe driehoek is dit? Gee redes vir jou antwoord.

VRAAG 3

'n Arend sweef in die lug by punt B en kan twee klein diertjies sien – 'n duif by punt C en 'n muis by punt D. Die inklinasiehoek tussen die arend en die muis is y, en tussen die arend en die duif is x. Die duif is 12 meter reg bo die muis en die arend is reg bo punt A. Die horisontale lyn CE is parallel met AD.



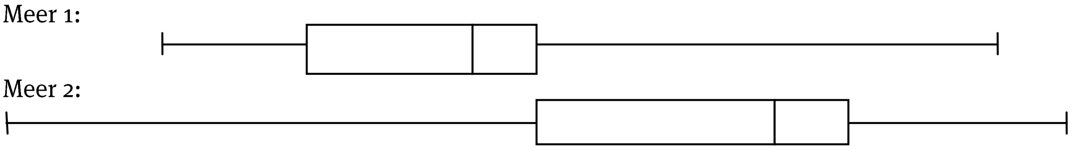
3.1 Bepaal die grootte van C^BD.
3.2 Bepaal die lengte van BD in terme van x en y.
3.3 Bepaal nou die lengte van AB in terme van x en y.
3.4 As x = 38° en y = 43,21°, bepaal die werklike lengte van AB, korrek tot twee desimale plekke.

VRAAG 4

4.1 'n Seshoekige pizza het sylengtes van 7 cm. Bereken die oppervlakte van die pizza.
4.2 As 5 van die pizza's op mekaar geplaas word, en elke opeenvolgende pizza se sykante is 0,5 mm minder as die vorige een, bereken die oppervlakte van die boonste pizza.
4.3 'n Pakkie lekkers het 'n halfrond onder en 'n silinder bo-op. Die omtrek van die silinder is 4 cm en die hoogte is 10 cm. Bepaal die volume van die pakkie lekkers.

VRAAG 5

5.1 Die houer-en-puntstipping hieronder stel die bevolkingsdigtheid van soutwater-garnale in twee soutwater-mere in die Amerikas, oor 'n tydperk van twee jaar voor.



5.1.1 Bepaal die vyfgetal-opsomming vir albei bevolkings.
5.1.2 Watter meer het die grootste verandering in bevolkingsgetalle gehad gedurende die twee jaar?
5.1.3 Skryf die interkwartiel variasiewydte vir albei datastelle neer.
5.1.4 Verduidelik die verspreiding van die data vir albei mere.
5.1.5 Watter bevolking is meer egalig?

5.2 'n Opname is gedoen om die ouderdom waarop mense in die Noord-Westelike provinsie na aftree-oorde trek, te bepaal. Die resultate van die opname is in die tabel hieronder:

Ouderdom	Frekwensie	Kumulatiewe frekwensie
$40 \leq x < 50$	12	
$50 \leq x < 60$	27	

$60 \leq x < 70$	58	
$70 \leq x < 80$	215	
$80 \leq x < 90$	143	
$90 \leq x < 100$	42	

5.2.1 Hoeveel mense het aan hierdie opname deelgeneem?

5.2.2 Voltooi die tabel hierbo.

5.2.3 Stel die inligting met 'n ogief voor.

5.2.4 Bepaal die mediaan-ouderdom warop die mense in die opname na aftree-oorde trek.

VRAAG 6

6.1 Die diepte van die diepkant van 19 skole se swembaddens word hieronder aangedui:

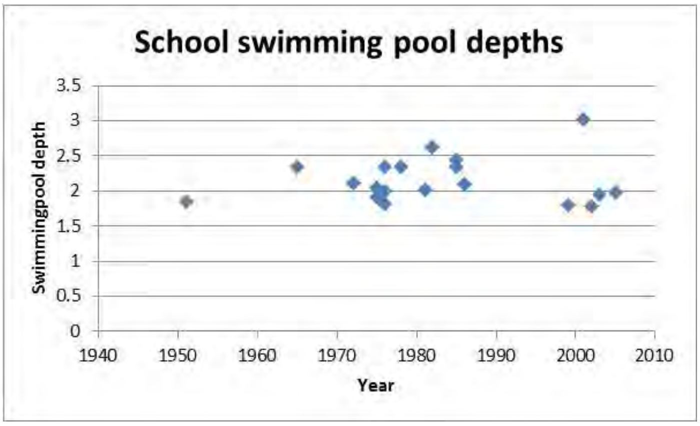
2,12; 2,05; 2,63; 1,80; 1,85; 2,35; 2,44; 2,01; 3,02; 1,78; 1,95; 1,98; 2,09; 2,35; 1,82; 2,35; 1,99; 1,92; 2,35

6.1.1 Bepaal die gemiddelde, mediaan en modus van die dieptes van die swembaddens.

6.1.2 Bepaal die standaardafwyking van die dieptes deur 'n sakrekenaar te gebruik.

6.1.3 Hoeveel swembaddens val binne twee standaardafwykings van die gemiddelde?

6.2 Die swembaddens hierbo is op verskillende tye gebou. 'n Spreidingsdiagram van die data word hieronder gegee:



6.2.1 Skets 'n "lyn wat die beste pas" op die data hierbo.

6.2.2 Wat sal jy sê is die diepte van 'n skoolswembad wat in 1979 gebou is?

6.2.3 Gebruik jou lyn wat die beste pas om die jaar waarin 'n swembad met 'n diepte van 2,25 m gebou is, te skat.

VRAAG 7

7.1 Evalueer tan 405° + cos 270°.sin 45°

7.2 Bewys dat $\sin x = \tan x\ (\cos^3 x + \cos x \sin^2 x)$

7.3 Bepaal die algemene oplossing vir die vergelyking $\sin 3x = -0{,}876$, korrek tot twee desimale plekke.

Chapter 1

1   1.1 $3^{\frac{4}{3}} = 3^{\frac{4}{3}}$

1.2 $\sqrt[3]{3^3} = 3^{\frac{3}{3}} = 3^1 = 3$

1.3 $(3^{\frac{-3}{2}})^{\frac{2}{5}} = 3^{\frac{-6}{10}} = 3^{-\frac{3}{4}}$

1.4 $4^{\frac{3}{2}} - 36^{\frac{1}{2}} + 216^{\frac{1}{3}}$

$= (2^2)^{\frac{3}{2}} - (3^2 \times 2^2)^{\frac{1}{2}} + (3^3 \times 2^3)^{\frac{1}{3}}$

$= 2^{2\times\frac{3}{2}} - (3^{2\times\frac{1}{2}} \times 2^{2\times\frac{1}{2}}) + (3^{3\times\frac{1}{3}} \times 2^{3\times\frac{1}{3}})$

$= 2^{\frac{6}{2}} - (3^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{2}{2}}) + (3^{\frac{3}{3}} \times 2^{\frac{3}{3}})$

$= 2^3 - (3^1 \times 2^1) + (3^1 \times 2^1)$ $= 2^3 - 6 + 6$ $= 8$

1.5 $(0{,}0625)^{-\frac{3}{4}} . (0{,}0125)$

$= (0{,}5^4)^{-\frac{3}{4}} . (0{,}5^3)$ $= (0{,}5^{-\frac{12}{4}}) . (0{,}5^3)$

$= 0{,}5^{-3} . 0{,}5^3$ $= 0{,}5^0$ $= 1$

1.6 $\sqrt[6]{(64n^{12})^2} = \sqrt[6]{(2^6n^{12})^2} = \sqrt[6]{(2^{12}n^{24})} = 2^2n^4 = 4n^4$

1.7 $(49m^7n^9)^{\frac{6}{4}} = (7^2m^7n^9)^{\frac{6}{4}} = 7^{\frac{12}{4}}m^{\frac{42}{4}}n^{\frac{54}{4}} = 7^3m^{10{,}5}n^{13{,}5} = 343\,m^{10{,}5}n^{13{,}5}$

1.8 $(81x^3y^7)^{-\frac{2}{3}} . 3(x^{-4}y^{-3})^{\frac{2}{-3}}.$

$= (3^4x^3y^7)^{-\frac{2}{3}} . 3(x^{-4}y^{-3})^{-\frac{2}{3}} = (3^{-\frac{8}{3}}x^{-\frac{6}{3}}y^{-\frac{14}{3}}) . 3(x^{\frac{8}{3}}y^{\frac{6}{3}})$

$= 3^{-\frac{8}{3}}x^{-2}y^{-\frac{14}{3}} \times 3x^{\frac{8}{3}}y^2 = \frac{3x^{\frac{2}{3}}}{3^{\frac{8}{3}}y^{\frac{8}{3}}}$

1.9 $[\frac{\sqrt{169x^3y^4}}{(7x^{-3})^{-4}}]^{-1} = [\frac{13\sqrt{x^3}y^2}{(7^{-4}x^{12})}]^{-1} = \frac{7^{-4}x^{12}}{13(x^3)^{\frac{1}{2}}y^2} = \frac{\frac{1}{7^4}x^{12}}{13(x^{\frac{3}{2}})y^2} = \frac{x^8}{\frac{1}{31213\,y^2}}$

1.10 $(4^{2n+3})^{\frac{1}{7}} . \frac{(7^{2n-3})^{\frac{1}{7}}}{(12^{2n-3})^{\frac{1}{7}}} . (5^{2n+3})^{\frac{1}{7}} = (2^2)^{\frac{2}{7n}+\frac{3}{7}} . \frac{7^{\frac{2}{7}n-\frac{3}{7}}}{(3.2^2)^{\frac{2}{7}n-\frac{3}{7}}} . 5^{\frac{2}{7}n+\frac{3}{7}} =$

$\left(2^{\frac{4}{7n}+\frac{6}{7}}\right)\left(\frac{7^{\frac{2}{7n}-\frac{3}{7}}}{3^{\frac{2}{7n}-\frac{3}{7}} . 2^{\frac{4}{7n}-\frac{6}{7}}}\right) . (5^{\frac{2}{7n}+\frac{3}{7}})$

$= 2^{\frac{4}{7n}+\frac{6}{7}} . 7^{\frac{2}{7n}-\frac{3}{7}} . 5^{\frac{2}{7n}+\frac{3}{7}} . 3^{\frac{-2}{7n}-\frac{3}{7}} . 2^{\frac{-4}{7n}+\frac{6}{7}} = 2^{\frac{12}{7}} . 7^{\frac{2}{7n}-\frac{3}{7}} . 5^{\frac{2}{7n}+\frac{3}{7}} . 3^{\frac{-2}{7n}-\frac{3}{7}}$

2   2.1 $y^{\frac{2}{3}} = 3^2$

$(y^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} = (3^2)^{\frac{3}{2}}$ $y = 3^3$ $y = 27$

2.2 $k^{\frac{1}{5}} = 3$ $\quad (k^{\frac{1}{5}})^{\frac{5}{1}} = 3^5$ $\quad k = 243$

2.3 $m^{\frac{-4}{3}} = 0{,}0625$

$(m^{\frac{-4}{3}})^{\frac{-3}{4}} = (0{,}5^4)^{\frac{-3}{4}}$

$m = 0{,}5^{\frac{-12}{4}}$ $\quad = 0{,}5^{-3}$ $\quad = \frac{1}{0{,}5^3}$

2.4 $2^{y+3} + 2^y = 9$

$2^y(2^3 + 1) = 9$

$2^y(9) = 9$

$2^y = 1$

$2^y = 2^\circ$

$y = 0$

2.5 $7^{-k} - 7^{-k-2} = 48$

$7^{-k}(1 - 7^{-2}) = 48$

$7^{-k}\left(1 - \frac{1}{49}\right) = 48$

$7^{-k}\left(\frac{48}{49}\right) = 48$

$7^{-k} = \frac{48}{\frac{48}{49}}$

$7^{-k} = 48 \times \frac{49}{48}$

$7^{-k} = 49$

$7^{-k} = 7^2$

$-k = 2$

$k = -2$

2.6 $2^{\frac{x}{2}} + 2^{\frac{x}{2}+1} = 24$

$2^{\frac{x}{2}} + (1 + 2^1) = 24$

$2^{\frac{x}{2}}(3) = 24$

$2^{\frac{x}{2}} = 8$

$2^{\frac{x}{2}} = 2^3$

$\frac{x}{2} = 3$

$x = 6$

2.7 $(7^x + 14)(2^x - 0{,}0875) = 0$

$7^x = -14$ $\quad$ or $\quad 2^x = 0{,}0875$

$7^x = -14$ $\qquad$ $2^x = \frac{875}{10000}$

Geen oplossing $\qquad$ $= \frac{5^3.7}{5^4.4^2}$

$= \frac{7}{5.4^2} \qquad = \frac{7}{80}$

2.8 $3^{2x} - 2.3^x = 3$

$3^{2x} - 2.3^x - 3 = 0$

$(3^x - 3)(3^x + 1) = 0$

$3^x = 3$ of $3^x = -1$

$3^x = 3^1$ of $3^x = -3^\circ$

$x = 1$ $\qquad$ $x = 0$

2.9 $16^x + 8.4^x = 48$

$2^{4x} + 2^3.2^{2x} = 48$ laat $2^{2x} = k$

$k^2 + 2^3.k = 48$

$k^2 + 8k - 48 = 0$

$(k - 4)(k + 12) = 0$

$k = 4$ of $k = -12$

$2^{2x} = 4$ of $2^{2x} = -12$

$2x = 2$ $\qquad$ geen oplossing

$x = 1$

2.10 $7^{-x+2} + 7^{2+x} = 392$

$7^{-x}.7^3 + 7^2.7^x = 392$

$\frac{1}{7^x}.7^3 + 7^2.7^x = 392$

Let $\quad 7^x = k$

$\frac{1}{k}.7^3 + 7^2k = 392$

$49k^2 + 343 - 392k = 0$

$k^2 - 8k + 7 = 0$

$(k - 7)(k - 1) = 0$

$k = 7$ of $k = 1$

$7^x = 7$ of $7^x = 1$

$x = 1$ $\qquad$ $7^x = 7^\circ$ $\qquad$ $x = 0$

3 3.1 $\sqrt[3]{5} + 9\sqrt[3]{5} - 4\sqrt[3]{5} = 6\sqrt[3]{5}$

3.2 $12\sqrt{9} - 3\sqrt{45} + 6\sqrt{72}$

$= 12\sqrt{3^2} - 3\sqrt{5.3^2} + 6\sqrt{3^2 2^3}$

$= (12\,.3) - \left(3\,.3\sqrt{5}\right) + (6\,.\,3\,.\,2\,.\sqrt{2})$

$= 36 - 9\sqrt{5} + 36\sqrt{2}$

3.3 $\frac{(\sqrt{50} - \sqrt{72})}{\sqrt{98}}$

$= \dfrac{\sqrt{5^2.2} - \sqrt{3^2\,.\,2^3}}{\sqrt{7^2.2}}$

$= \dfrac{5\sqrt{2} - 3\,.2\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}$

$= \dfrac{-\sqrt{2}}{7\sqrt{2}}$

$= -\dfrac{1}{7}$

3.4 $\sqrt[5]{\sqrt{a^{100}}} + \sqrt[3]{\sqrt{a^{15}}} - \sqrt[7]{\sqrt{a^8}}$

$= \sqrt[10]{a^{100}} + \sqrt[6]{a^{15}} - \sqrt[14]{a^8}$

$= a^{10} + a^{\frac{15}{6}} - 9^{\frac{8}{14}}$

3.5 $\sqrt{18} - \sqrt{80} + \sqrt{98}$

$= \sqrt{3^2.2} - \sqrt{2^4.5} + \sqrt{7^2.2}$

$= 3\sqrt{2} - 4\sqrt{5} + 7\sqrt{2}$

$= 10\sqrt{2} - 4\sqrt{5}$

3.6 $\frac{\sqrt{\sqrt{64} - \sqrt{48}}}{\sqrt{50}}$

$= \dfrac{\sqrt{8 - \sqrt{2^4\,.3}}}{\sqrt{5^2\,.2}}$

$= \dfrac{\sqrt{2^3 - 4\sqrt{3}}}{5\sqrt{2}}$

$= (2^3 - 2^2\left(3^{\frac{1}{2}}\right))^{\frac{1}{2}}$

$= 2^{\frac{3}{2}} - 2^1\,(3^{\frac{1}{4}})$

$= 2^1\,.\,2^{\frac{1}{2}} - 2^1(3^{\frac{1}{4}})$

$$= \frac{2(\sqrt{2} - \sqrt[4]{3})}{5\sqrt{2}}$$

4 4.1 $3\sqrt{5} \times 2\sqrt{2} = 6\sqrt{10}$

4.2 $-4\sqrt{3} \times \left(-5\sqrt{2}\right) = 20\sqrt{6}$

4.3 $4\sqrt{5}\left(-2\sqrt{2} + 3\right) = -8\sqrt{10} + 12\sqrt{5}$

4.4 $2\sqrt{2}\left(10\sqrt{3} - 8\sqrt{2}\right) = 20\sqrt{6} - 16\sqrt{4} = 20\sqrt{6} - 32$

4.5 $\frac{\sqrt[4]{48x^4}}{y^{24}} = \left(\frac{48x^4}{y^{24}}\right)^{\frac{1}{4}} = \frac{48^{\frac{1}{4}}x}{y^6} = \frac{(2^4.3)^{\frac{1}{4}}x}{y^6} = \frac{2.3^{\frac{1}{4}}x}{y^6}$

4.6 $\sqrt[3]{\frac{125x^{12}}{y^6}} = \frac{5x^4}{y^2}$

4.7 $\sqrt[4]{\frac{3}{243}} = \sqrt[4]{\frac{3}{3^5}} = \sqrt[4]{\frac{1}{3^4}} = \frac{1}{3}$

4.8 $\frac{(k-2)}{k^2}$ if $k = 1 + \sqrt{3}$

$= \frac{(1+\sqrt{3}-2)}{(1+\sqrt{3})^2} = \frac{\sqrt{3}-1}{(1+2\sqrt{3}+3)} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{3}+4}$

5 5.1 $\sqrt{x-1} = 2$

$x - 1 = 4$

$x = 5$

5.2 $\sqrt{x+3} = 5$

$x + 3 = 25$

$x = 22$

5.3 $\sqrt{x-1} = 4$

$x - 1 = 16$

$x = 17$

5.4 $x - \sqrt{-8x-16} = 5$

$-\sqrt{-8x-16} = 5 - x$

$-(-8x - 16) = (5 - x)^2$

$8x + 16 = x^2 - 2x + 25$

$0 = x^2 - 10x + 9$

$0 = (x - 9)(x - 1)$

$x = 9$ of $x = 1$

5.5 $\sqrt{x+7} = -7$

$x + 7 = -7^2$

$x = -49 - 7$

$x = -56$

5.6 $\sqrt{11} + \sqrt{y} = \sqrt{y-2}$

$11 + y = y - 2$

$+y - y = -13$

Geen oplossing

Hoofstuk 2

1 1.1 $(x-2)(x+7) = 0$
$x - 2 = 0$ of $x + 7 = 0$
$x = 2$ of $x = -7$

1.2 $(2y-3)(y+5) = 0$
$2y - 3 = 0$ of $y = 5 = 0$
$2y = 3$ $\quad$ $y = -5$
$y = \frac{3}{2}$

1.3 $x^2 + 21x + 10 = 0$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$= \frac{-21 \pm \sqrt{21^2-4(1)(10)}}{2(1)}$
$= \frac{-21 \pm 20,02}{2}$
$x = -0.49$ of $x = -20,51$

1.4 $3k(k+4) = 0$
$3k = 0$ of $k + 4 = 0$
$k = 0$ $\quad$ $k = -4$

1.5 $9x^2 - 5x = 0$
$x(9x-5) = 0$
$x = 0$ of $9x - 5 = 0$
$9x = 5$
$x = \frac{5}{9}$

1.6 $3k(1-k) = 5(k+1) = 0$
$3k - 3k^2 + 5k + 6 = 0$
$-3k^2 + 8k + 6 = 0$
$3k^2 - 8k - 6 = 0$
$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$
$= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2-4(3)(-6)}}{2(3)}$
$= \frac{8 \pm 11.66}{6}$

$x = 3.28$ of $x = -0.61$

1.7 $(3p-2)(p+1)+2=0$

$3p^2+p-2+2=0$

$3p^2+p=0$

$p(3p+1)=0$

$p=0$ of $3p=-1$

$p=\frac{-1}{3}$

1.8 $b(b+5)=6$

$b^2+5b-6=0$

$(b-1)(b+6)=0$

$b=1$ or $b=-6$

1.9 $(x-2)(x+2)=6(3x+5)$

$x^2-4=18x+30$

$x^2-18x-34=0$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\frac{-(-18)\pm\sqrt{(-18)^2-4(1)(-34)}}{2(1)}$

$\frac{18\pm 21.45}{2}$

$x=19{,}72$ or $x=-1{,}725$

1.10 $4(x-1)(x+1)= 3(2-x)+5$

$4(x^2-1)=6-3x+5$

$4x^2+3x-15=0$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-3\pm\sqrt{15{,}78}}{8}$

$x=1{,}60$ or $x=-2{,}35$

2 2.1 $\frac{5}{x-1}=\frac{x}{x+1}$

$5(x+1)= x(x-1)$

$5x+5=x^2-x$

$0=x^2-6x-5$

$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$=\frac{-(-6)\pm\sqrt{(-6)^2-4(1)(-5)}}{2(1)}$

$\frac{6\pm 7{,}48}{2}$

$x=6{,}74$ or $x=-0{,}74$

2.2 $\frac{3}{2x-6}+\frac{x}{x-3}=0$

$3(x-3)+x(2x-6)=0$

$3x-9+2x^2-6x=0$

$2x^2-3x-9=0$

$(2x+3)(x-3)=0$

$2x+3=0$ of $x-3=0$

$x=\frac{-3}{2}$ of $x=3$

2.3 $\frac{(x+2)}{(x-3)}=7+\frac{2}{(x-3)}$

$x+2=7(x-3)+2$

$x + 2 = 7x - 21 + 2$

$21 = 6x$

$\frac{21}{6} = x$

3 3.1 $\sqrt{(6x + 5)} = x$

$(\sqrt{(6x + 5)})^2 = x^2$

$6x + 5 = x^2$

$0 = x^2 - 6x - 5$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(1)(-5)}}{2}$

$\frac{6 \pm 7{,}48}{2}$

$x = 6{,}74$ of $x = -0{,}74$

3.2 $x = \pm\sqrt{27}$

3.3 $\sqrt{2x + 3} - x = 0$

$\sqrt{2x + 3} = x$

$(\sqrt{2x + 3})^2 = x^2$

$2x + 3 = x^2$

$0 = x^2 - 2x - 3$

$0 = (x - 3)(x + 1)$

$x = 3$ of $x = -1$

3.4 $\sqrt{x + 9} + x + 3 = 0$

$(\sqrt{x + 9})^2 = (-x - 3)^2$

$x + 9 = x^2 - 6x + 9$

$0 = x^2 - 7x$

$0 = x(x - 7)$

$x = 0$ of $x = 7$

3.5 $2 = \sqrt{(x^2 - 27)}$

$2^2 = \sqrt{x^2 - 27})^2$

$4 = x^2 - 27$

$0 = x^2 - 31$

$31 = x^2$

$\pm\sqrt{31} = x$

3.6 $\sqrt{(x-1)} = \sqrt{(4x-2)}$

$\left(\sqrt{x-1}\right)^2 = \left(\sqrt{4x-2}\right)^2$

$x - 1 = 4x - 2$

$1 = 3x$

$\frac{1}{3} = x$

4 4.1 $x^2 = 81$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{81}$

$x = \pm 9$

4.2 $x^2 = 27$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{27}$

$x = \pm\sqrt{27}$

$= \pm 5{,}20$

4.3 $x^2 - 16 = 0$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{16}$

$x = \pm 4$

4.4 $-x^2 + 49 = 0$

$\sqrt{49} = \sqrt{x^2}$

$\pm 7 = x$

4.5 $(x+4)^2 = 48$

$\sqrt{(x+4)^2} = \sqrt{48}$

$x + 4 = \pm 6{,}93$

$x = \pm 2{,}93$

4.6 $5(x+5)^2 = 125$

$\sqrt{(x+5)^2} = \sqrt{25}$

$x + 5 = \pm 5$

$x = -10$ or $x = 0$

4.7 $3\,(x+4)^2 - 12 = 0$

$3\,(x+4)^2 = 12$

$\sqrt{(x+4)^2} = \sqrt{4}$

$x + 4 = \pm 2$

$x = -2$ of $x = -6$

4.8 $x^2 = (2x - 3)^2$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{(2x-3)^2}$

$x = 2x - 3$

$0 = x - 3$

$3 = x$

4.9 $3\,(x - 2)^2 - 16 = 2$

$3\,(x - 2)^2 = 18$

$\sqrt{(x-2)^2} = \sqrt{6}$

$x - 2 = \pm 2{,}45$

$x = 4{,}45$ of $x = -0{,}45$

4.10 $-x = (\frac{1}{2}x + 2)^2 - 6$

$-x + 6 = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 4$

$0 = \frac{5}{4}x^2 + 3x + 10$

5 5.1 $(x^2 - 3x)^2 - 2(x^2 - 3x) - 5 = 0$

Let $(x^2 - 3x) = k$

$(k)^2 - 2(k) - 5 = 0$

$k^2 - 2k - 5 = 0$

$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{\left(-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-5)}\right)}{2}$

$\frac{2 \pm 4{,}90}{2}$

$k = 3{,}45$ of $k = -1{,}45$

$x^2 - 3x = 3{,}45$ of $x^2 - 3x = -1{,}45$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ of $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(3{,}45)}}{2}$ of $= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(1)(-1{,}45)}}{2}$

$= \frac{3 \pm \sqrt{-4,8}}{2}$ of $= \frac{3 \pm 14,8}{2}$

Geen oplossing $x = 8,9$ of $x = -5,9$

5.2 $(x^2 - 2x)^2 = 14\,(x^2 - x) + 15$

laat $x^2 - 2x = k$

$(k)^2 = 14(k) + 15$

$k^2 - 14k - 15 = 0$

$(k - 15)(k + 1) = 0$

$k = 15$ of $k = -1$

$x^2 - 2x = 15$ of $x^2 - 2x = -1$

$x^2 - 2x - 15 = 0$ $x^2 - 2x + 1 = 0$

$(x - 5)(x + 3) = 0$ $(x - 1)(x - 1) = 0$

$x = 5$ of $x = -3$ $x = 1$

5.3 $\sqrt{x - 2} + 4 = \frac{5}{\sqrt{x-2}}$

Let $\sqrt{x - 2} = k$

$k + 4 = \frac{5}{k}$

$k^2 + 4k = 5$

$k^2 + 4k - 5 = 0$

$(k + 1)(k - 1) = 0$

$k = -5$ of $k = 1$

$\sqrt{x - 2} = -5$ of $\sqrt{x - 2} = 1$

$x - 2 = (-5)^2$ $x - 2 = 1^2$

$x = 27$ $x = 3$

5.4 $\left(\frac{3}{x} + x\right)^2 + \left(\frac{3}{x} + x\right) = 19$

Laat $\frac{3}{x} + x = k$

$k^2 + k - 19 = 0$

$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - (4)(1)(-19)}}{2}$

$= \frac{-1 \pm 8,77}{2}$

$k = 3{,}89$ of $k = -4{,}89$

$\frac{3}{x} + x = 3{,}89$ of $\frac{3}{x} + x = -4{,}89$

$3 + x^2 - 3{,}89x$ $\quad$ $3 + x^2 + 4{,}89x = 0$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ $\quad$ $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-3{,}89) \pm \sqrt{(-3{,}89)^2 - 4(3)}}{2}$ $\quad$ $= \frac{-(4{,}89) \pm \sqrt{(4{,}89)^2 - 4(3)}}{2}$

$= \frac{3{,}89 \pm 1{,}77}{2}$ $\quad$ $= \frac{4{,}89 \pm 11{,}91}{2}$

$x = 2{,}83$ of $x = 1{,}06$ $\quad$ $x = 8{,}40$ of $x = -3{,}51$

5.5 $5\,(2x^2 + x - 1) = 20\,(2x^2 + x - 1) + 8$

laat $2x^2 + x - 1 = k$

$5k = 20k + 8$

$0 = 15k + 8$

$\frac{-8}{15} = k$

but $k = 2x^2 + x - 1$

$\frac{-8}{15} = 2x^2 + x - 1$

$0 = 2x^2 + x - \frac{7}{15}$

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)^2 - (4)(2)(-\frac{7}{15})}}{2(2)}$

$= \frac{-1 \pm 2{,}18}{4}$

$x = 0{,}295$ of $x = -0{,}795$

5.6 $2\,(x+3)^2 - 3(x+3) - 4 = 2$

let $x + 3 = k$

$2k^2 - 3k - 6 = 0$

$k = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4(2)(-6)}}{2(2)}$

$= \frac{3 \pm 7{,}55}{4}$

$k = 2{,}64$ of $k = -1{,}14$

but $k = x + 3$

$x + 3 = 2{,}64$ of $x + 3 = -1{,}14$

$x = -0{,}36$ $x = -4{,}14$

5.7 $\frac{24}{3(x-2)} = \frac{7}{9(x+6)} - 3$

$24\big(9(x+6)\big) = 7\big(3(x-2)\big) - 3\big(3(x-2)\big)\big(9(x+6)\big)$

$216x + 1296 = 21x - 42 - 3(27x^2 + 162x - 54x - 324)$

$216x + 1296 = 21x - 42 - 81x^2 - 486x + 162x + 972$

$81x^2 + 519x + 366 = 0$

$x = \frac{-b \pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\frac{-519 \pm\sqrt{519^2 - 4(81)(366)}}{2(81)}$

$\frac{-519 \pm 388{,}30}{162}$

$x = 1{,}42$ of $x = -3{,}38$

6 6.1 $p^2 - p - 12 = 0$

$(p-4)(p+3) = 0$

$p = 4$ of $p = -3$

6.2 $x^2 + 3x = 4$ $x^2 + 3x = -3$

$x^2 + 3x - 4 = 0$ $x^2 + 3x + 3 = 0$

$(x+4)(x-1) = 0$ $x = \frac{b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$x = -4$ of $x = 1$ $= \frac{3 \pm\sqrt{3^2 - 4(1)(3)}}{2}$

Geen oplossing

7 $(a+3)(b+4) = 0$ $a = -7$

$(-4)(b+4) = 0$

$-4b - 16 = 0$

$-4b = 16$

$b = -4$

8 8.1 $(y-2)((-7)^2 + 25(-7) - 6) = 0$

$(y-2)(-132) = 0$

$-132y + 264 = 0$

$y = 2$

8.2 $(y-2)(12^2 + 25(12) - 6) = 0$

$(y-2)(438) = 0$

$438y - 876 = 0$

$y = 2$

9 9.1 $x^2 + 2x + 4 = 0$

$x^2 + 2x = -4$

$x^2 + 2x + (\frac{b}{2})^2 = -4 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$

$x^2 + 2x + 1 = -4 + 1$

$(x+1)^2 = -3$

$\sqrt{(x+1)^2} = \pm\sqrt{-3}$

$x + 1 = \pm\sqrt{-3}$

$x = -1 \pm \sqrt{-3}$

$x = 0{,}73$ of $x = -2{,}73$

9.2 $x^2 - 5x + 15 = 0$

$x^2 - 5x = -15$

$x^2 - 5x + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = -15 + (\frac{b}{2})^2$

$x^2 - 5x + \left(\frac{5}{2}\right)^2 = -15 + \left(\frac{5}{2}\right)^2$

$\sqrt{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2} = \pm\sqrt{-8{,}75}$

$x - \frac{5}{2} = \pm\sqrt{-8{,}75}$

$x = \frac{5}{2} \pm \sqrt{-8{,}75}$

Geen oplossing

9.3 $x^2 - x + 20 = 0$

$x^2 - x + (\frac{-1}{2})^2 = +20 + (\frac{-1}{2})^2$

$\sqrt{(x - \left(\frac{+1}{2}\right))^2} = \pm\sqrt{20{,}25}$

$x - \frac{1}{2} = \pm\sqrt{20{,}25}$

$x = \frac{1}{2} \pm 4{,}5$

$x = 5$ of $x = -4$

9.4 $x^2 + 6x = -5$

$x^2 + 6x + (\frac{b}{2})^2 = -5 + (\frac{b}{2})^2$

$x^2 + 6x + \left(\frac{6}{2}\right)^2 = -5 + 9$

$\sqrt{(x+3)^2} = \pm\sqrt{4}$

$x + 3 = \pm 4$

$x = -3 \pm 4$

$x = 1$ of $x = -7$

9.5 $13x = 10 + x^2$

$-10 = -13x + x^2$

$-10 + (\frac{-13}{2})^2 = (\frac{-13}{2})^2 - 13x + x^2$

$\sqrt{32{,}25} = \sqrt{(x - \frac{13}{2})^2}$

$\pm 5{,}68 = x - \frac{13}{2}$

$\frac{13}{2} \pm 5{,}68 = x$

$x = 12{,}18$ of $x = 0{,}82$

9.6 $x^2 - 6x = 3$

$x^2 - 6x + (\frac{-6}{2})^2 = 3 + (\frac{-6}{2})^2$

$\sqrt{(x-3)^2} = \pm\sqrt{12}$

$x - 3 = \pm\sqrt{12}$

$x = 3 \pm 3{,}46$

$x = 6{,}46$ of $x = 0{,}46$

Hoofstuk 3

1 1.1 i 2

ii 49; 64; 81; 100; 121

iii $T_n = n^2 + 4n + 4$

		iv	$T_{12} = 12^2 + 4(12) + 4 = 196$
			$T_{30} = 30^2 + 4(30) + 4 = 1\,024$
	2.2	i	6
		ii	84; 119; 160; 207; 260
		iii	$T_n = 3n^2 + 2n - 1$
		iv	$T_{12} = 3(12)^2 + 2(12) - 1 = 455$
			$T_{30} = 3(30)^2 + 2(30) -1 = 2\,759$
	2.3	i	2
		ii	73; 96; 121; 148; 177
		iii	$T_n = n^2 + 12n - 12$
		iv	$T_{12} = 12^2 + 12(12) -12 = 276$
			$T_{30} = 30^2 + 12(30) -12 = 1\,248$
	2.4	i	10
		ii	92; 141; 200; 269; 348
		iii	$T_n = 5n^2 - 6n - 3$
		iv	$T_{12} = 5(12)^2 -6(12) -3 = 645$
			$T_{30} = 5(30)^2 -6(30) -3 = 4\,317$
	2.5	i	34
		ii	321; 485; 683; 915; 1 181
		iii	$T_n = 17n^2 - 23n + 11$
		iv	$T_{12} = 17(12)^2 - 23(12) + 11 = 2\,183$
			$T_{30} = 17(30)^2 - 23(30) + 11 = 14\,621$

2	2.1	$T_1 = 1$
		$T_2 = 3$
		$T_3 = 7$
		$T_4 = 13$

$T_5 = 21$

$T_6 = 31$

$T_7 = 43$

2.2 $T_n = n^2 - n + 1$

2.3 $133 = n^2 - n + 1$

$\therefore n^2 - n - 132 = 0$

$\therefore (n - 12)(n + 11) = 0$

$\therefore n = 12$ or $n = -11$

(nie moontlik)

$\therefore 133$ is T_{12}

$1\,407 = n^2 - n + 1$

$\therefore n^2 - n - 1\,406 = 0$

$\therefore (n - 38)(n + 37) = 0$

$\therefore n = 38$ or $n = -37$

(nie moontlik)

$\therefore 1\,407$ is T_{38}

Hoofstuk 4

1 1.1 $\tan\theta = m$

$\tan\theta = 15$

$\theta = 86{,}19^0$

1.2 $\tan\theta = m$

$\tan\theta = 12/6$

$\theta = 63{,}43^0$

1.3 $\tan\theta = m$

$\tan\theta = -3/4$

$\theta = -36{,}87^0$

1.4 $\tan\theta = m$

$\tan\theta = -3$

$\theta = -71{,}57^0$

1.5 $\tan\theta = m$

$\tan\theta = -0{,}125$

$\theta = -7{,}13^0$

1.6 $m_{QR}= y_2-y_1/x_2-x_1$

$= -7-2/-4-(-6)$

$= -9/2$

$\tan\theta= -9/2$

$\theta= -77{,}47^0$

1.7 $m_{QR}= y_2-y_1/x_2-x_1$

$= -3-13/8-5/7$

$=-16/(51/7)$

$\tan\theta \quad = -16/(51/7)$

$\theta= -65{,}52^0$

1.8 $m_{QR} \quad = y_2-y_1/x_2-x_1$

$=-1-(-4)/-3-1$

$=3/-4$

$\tan\theta \quad = -3/4$

$\theta=-36{,}87^0$

1.9 $m_{QR} \quad = y_2-y_1/x_2-x_1$

$=-4-(-1)/-2-(-6)$

$=-3/4$

$\tan\theta \quad =-3/4$

$\theta=-36{,}87^0$

1.10 $m_{QR} \quad = y_2-y_1/x_2-x_1$

$=--1-7/5-(-12)$

$=-8/17$

$\tan\theta \quad =-8/17$

$\theta=--25.20^0$

2 2.1 $\tan\theta = m$

$\tan 72^0 = m$

$3.08 = m$

2.2 $\tan\theta = m$

$\tan 250^0 = m$

$2{,}75 = m$

2.3 $\tan\theta = m$

$\tan 13^0 = m$

$0{,}23 = m$

2.4 $\tan\theta = m$

$\tan -126^0 = m$

$1.38 = m$

2.5 $\tan\theta = m$

$\tan -50{,}8^0 = m$

$-1.23 = m$

2.6 $\tan\theta = m$

$\tan 185{,}15^0 = m$

$1{,}38 = m$

3 3.1 $m_{AB} = y_2 - y_1 / x_2 - x_1$ $\quad m_{CD} = y_2 - y_1 / x_2 - x_1$

$= 5-8/-1-7$ $\quad = -2-3/5-16$

$= 3/-8$ $\quad = -5/-11$

geen.

3.2 $m_{AB} = y_2 - y_1 / x_2 - x_1$ $\quad m_{CD} = y_2 - y_1 / x_2 - x_1$

$= -5-2/-5-7$ $\quad = -1-6/-5-7$

$= -7/-12$ $\quad = -5/-12$

$\therefore m_{AB} = m_{CD}$

Parallel.

3.3 $m_{AB}= y_2-y_1/x_2-x_1$ $m_{CD} = y_2-y_1/x_2-x_1$

$=6-(-7)/-9-(-5)$ $=--3-7/9-4$

$=1/-4$ $=-10/5= -2$

geen.

3.4 $m_{AB}= y_2-y_1/x_2-x_1$ $m_{CD} = y_2-y_1/x_2-x_1$

$=5-2/2-3$ $=3-3/-9-1$

$=-3$ $=0$

geen.

3.5 $m_{AB}= y_2-y_1/x_2-x_1$ $m_{CD} = y_2-y_1/x_2-x_1$

$=1-4/9-8$ $=3-5/-4-2$

$=-3$ $=1/3$

$m_{AB} \times m_{CD}$

$=-3 \times 1/3$

$=-1$

AB is loodreg op CD.

4 4.1 $y= mx +c$

$y= 5x – 1{,}7$

4.2 $y= mx +c$

$y= -2/5x +9$

4.3 $y- y_1 = m(x-x_1)$

$y-5= 7/3\ (x-(-13))$

$y= 7/3x + 106/3$

4.4 $y- y_1 = m(x-x_1)$

$y-(-1) = -5(x-(-2))$

$y= -5x -11$

4.5 $m = y_2-y_1/x_2-x_1$

$=5-(-1)/-4-(-1)$

$=-2$

$y- y_1 = m(x-x_1)$

$y-5= -2(x-(-4))$

$y= -2x -3$

4.6 $m = y_2-y_1/x_2-x_1$

$=-12-9/13-(-5)$

$=-21/18$

$y- y_1 = m(x-x_1)$

$y-(-12)= -21/18(x-13)$

$y= -21/18x + 19/6$

4.7 $5y= x-15$

$y=1/5x -3$

$m= 1/5$

gaan deur (-1; 4).

$y- y_1 = m(x-x_1)$

$y-4= 1/5(x- (-1))$

$y= 1/5 + 21/5$

4.8 $2y= 6x -7$

$y= 2x -7/2$

KT is loodreg op BS so:

$m_{KT} \times m_{BS} = -1$

$m_{KT} \times 2 = -1$

$m_{KT} = -1/2$

gaan deur (3/4; 0,5).

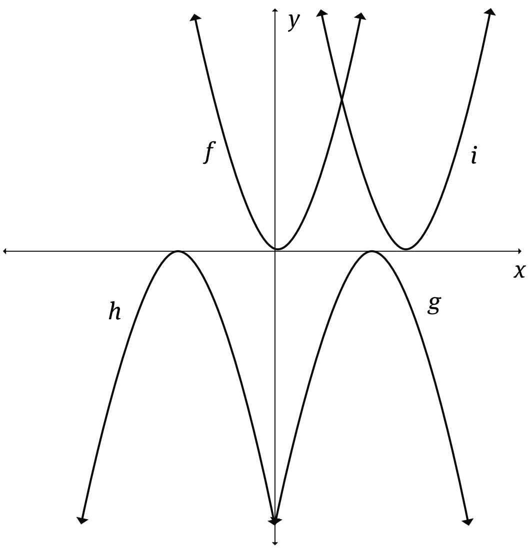
$y- y_1 = m(x-x_1)$

$y-0,5= -1/2(x- 4/3)$

y= -1/2x + 13/6

Hoofstuk 5

1 1.1



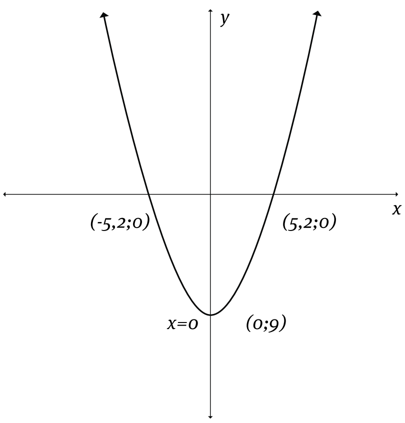
1.2 f: x = 0, g: x = 3, h: x = 2,5, i = x = 4

1.3 g: die simmetrie-as het 3 eenhede regs geskuif, p = -3

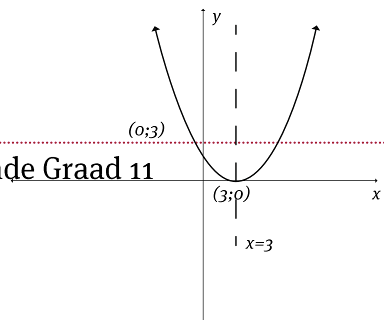
h: die simmetrie-as het 2,5 eenhede links geskuif, p = 2,5

i: die simmetrie-as het 4 eenhede regs geskuif, p = -4

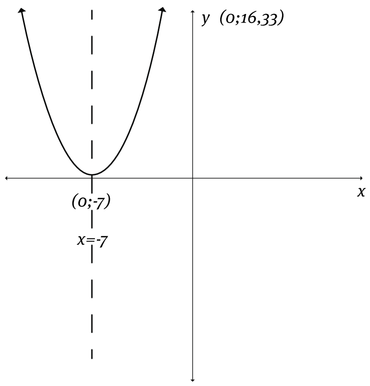
2 2.1



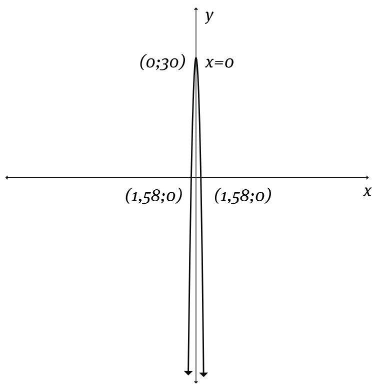
2.2



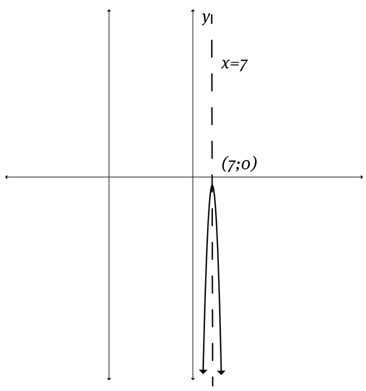
2.3



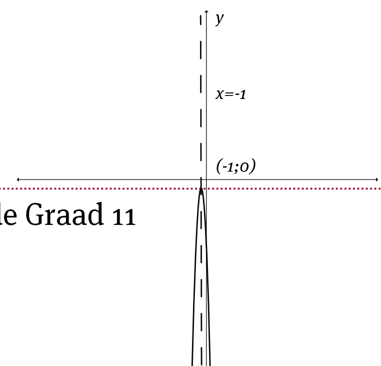
2.4



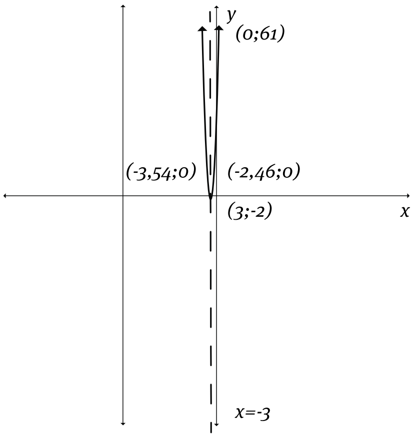
2.5



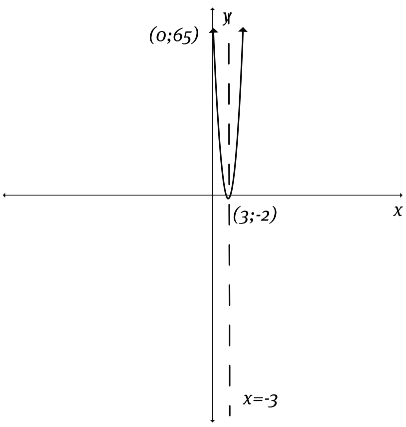
2.6



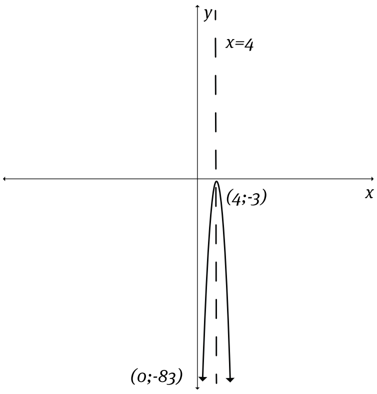
2.7



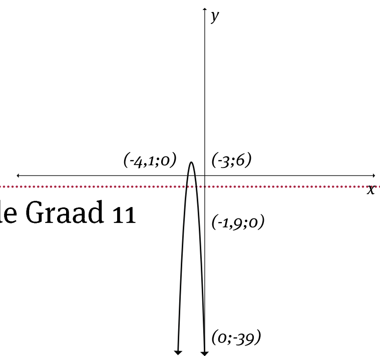
2.8



2.9



2.10



3 3.1 3.1.1i $h(x) = x^2 - 5$

$h(3) = (3)^2 - 5$

$= 4$

3.1.2 $h(x-3) = (x-3)^2 - 5$

$= x^2 - 6x + 9 - 5$

$= x^2 - 6x + 4$

3.1.3 $h(x) - 3 = (x^2 - 5) - 3$

$= x^2 - 8$

3.1.4 $h(x-3) + 7 = (x-3)^2 - 5 + 7$

$= x^2 - 6x + 9 - 5 + 7$

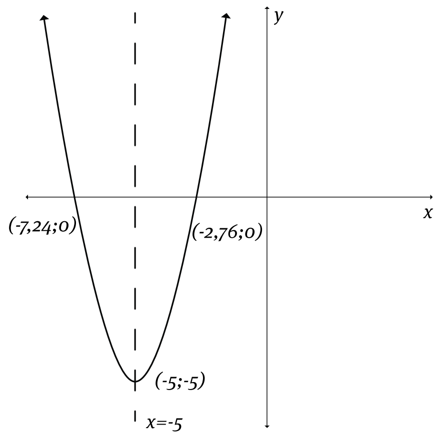
$= x^2 - 6x + 11$

3.2 h(x) is die oorspronklike funksie

h(x-3): die grafiek skuif drie eenhede regs

h(x) -3: die grafiek skuif drie eenhede af

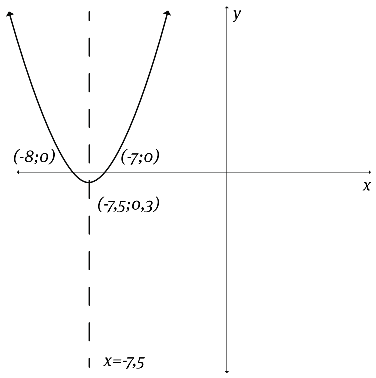
4 4.1



Definisieversameling: $x \in R$

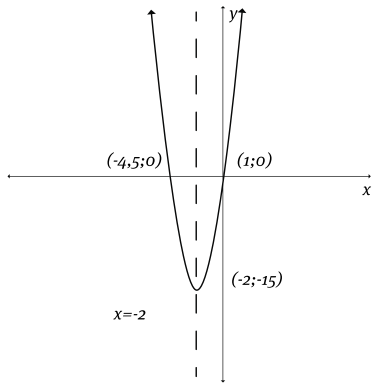
Waardeversameling:: $y \geq -5$

4.2



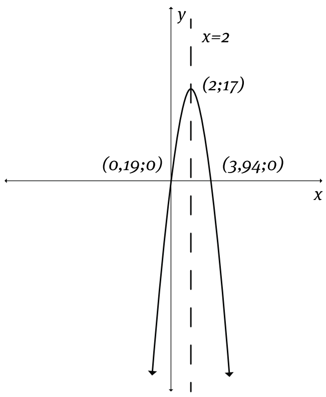
Definisieversameling: x ∈ R
Waardeversameling: y ≥ -0,3

4.3



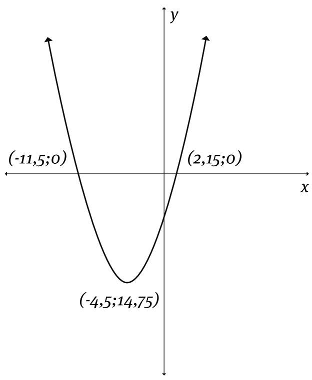
Definisieversameling: x ∈ R
Waardeversameling: y ≥ -15

4.4



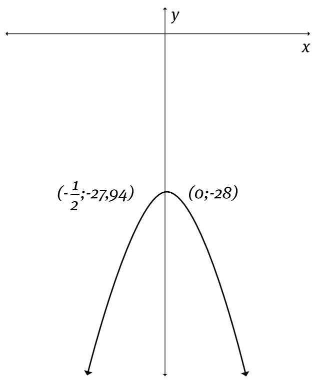
Definisieversameling: x ∈ R
Waardeversameling: y ≤ 17

5 5.1



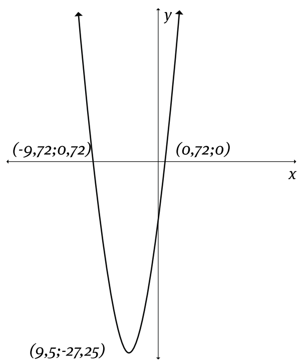
Definisieversameling: x ∈ R
Waardeversameling: y ≥ -14,75

5.2



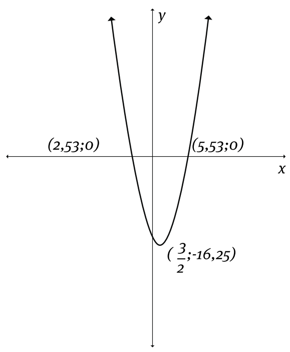
Definisieversameling: $x \in R$
Waardeversameling: $y \leq -27,94$

5.3



Definisieversameling: $x \in R$
Waardeversameling: $y \geq -27,25$

5.4



Definisieversameling: $x \in R$
Waardeversameling: $y \geq -16,25$

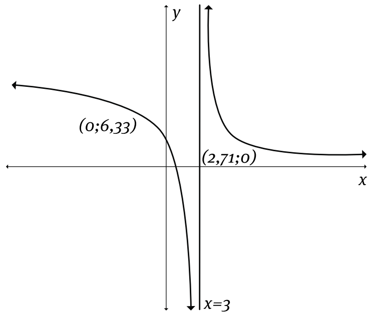
6 6.1 $y= x^2 -7 +3$
$y= x^2 - 4$
6.2 $y= x^2 -7 -9$
$y= x^2 -16$
6.3 $y= (x+4)^2 -7$
6.4 $y= (x-7)^2 -7$
6.5 $y= (x+3/4)^2 -7+ 1/3$

$y = (x+3/4)^2 - 20/3$

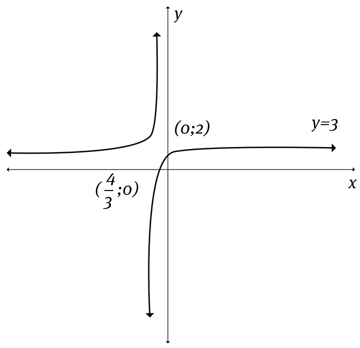
6.6 $y = (x-3,5)^2 - 7 - 5$

$y = (x-3,5)^2 - 12$

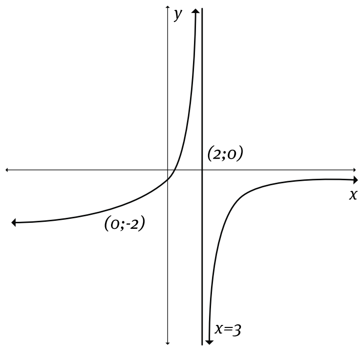
7 7.1



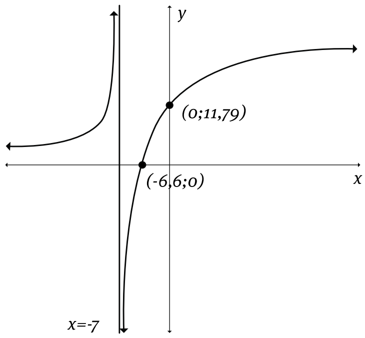
7.2



7.3



7.4



8 f(x) is c, g(x) is a en h(x) is b.

9 9.1 Skyf 4 eenhede op
Skyf 3 eenhede na links
Skyf 7 eenhede na regs
9.2 Skyf 3 eenhede af
Skyf 2 eenhede na links
Skyf 3 eenhede na regs
9.3 Skyf 5 eenhede op
Skyf 1 eenheid na regs
Skyf 1 eenheid na regs

10 Van die vergelyking $f(x) = (x + p)^2 + q$ is dit duidelik dat $a = 1$.
Die simmetrie-as is by $x = 2$.
$y = (x + p)^2 + q$
$0 = \left(-\frac{3}{2} - 2\right)^2 + q$
$q = -12{,}25$
$\therefore y = (x - 2)^2 - 12{,}25$

11 $y = \frac{3}{x-6} + 15, y = \frac{-2}{x+4} + 7$ en $y = \frac{-2{,}5}{x+3{,}5} - 5{,}5$

12 $f(x) = \left(-\frac{4}{3}\right)^x, g(x) = 13.5^{-x}$ en $h(x) = -\left(\frac{1}{5}\right)^x + 7$

13 13.1 KL = 2,5 eenhed
13.2 KB = 1 eenheid
13.3 Geen
13.4 Geen

14 14.1 $m_{MN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-6}{0-0{,}77} = \frac{3}{0{,}77} = 3{,}90$

14.2 $m_{MN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{5-2}{-1-6,25} = \frac{3}{-7,25} = -0,41$

14.3 $m_{MN} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{3-6}{0-0,77} = \frac{3}{0,77} = 3,90$

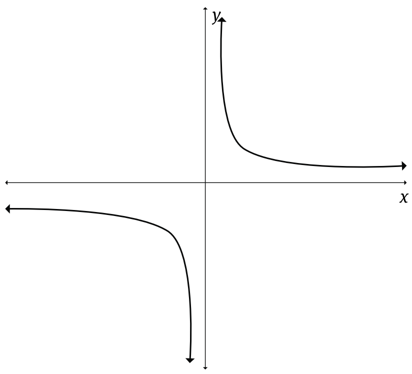
15 15.1 y= a/x

Vervang (1;15)

15=a/1

15= a

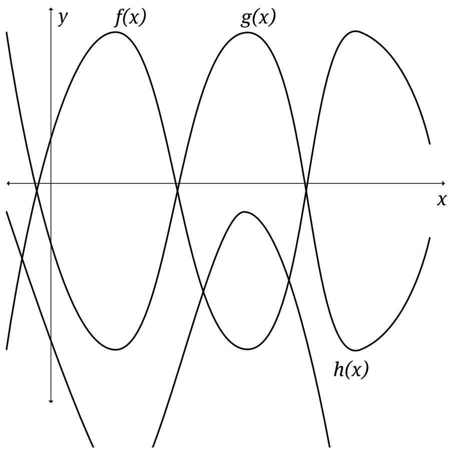
15.2



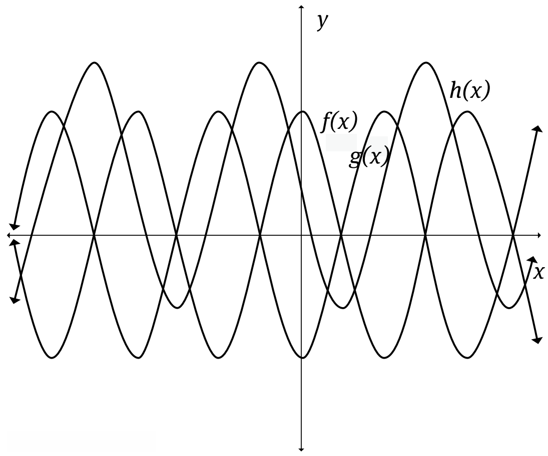
15.3 Die grafiek sal 15 eenhede op skuif

15.4 Die beperking is $x \neq 0$, want dit is ongedefinieërd.

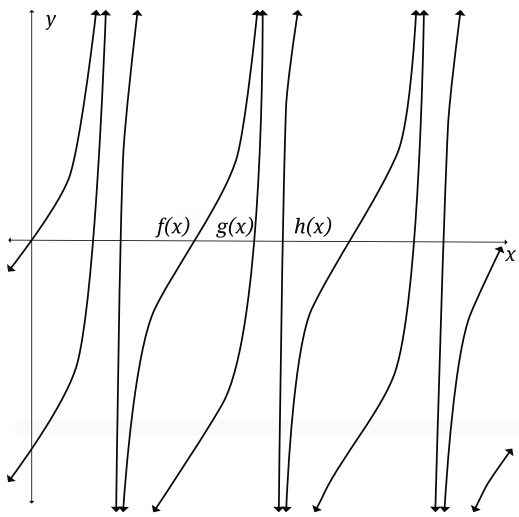
16 16.1



16.2



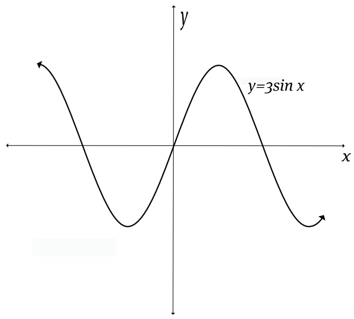
16.3



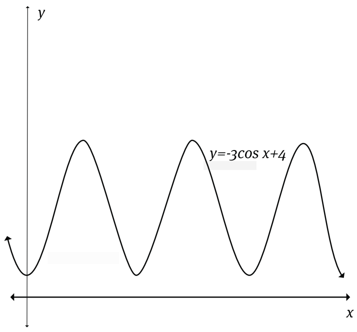
17

	Hoogste y-waarde	Laagste y-waarde	Amplitude	Waardeversameling	Periode
y=3sinx+5	8	2	3	y Ɛ [2;8]	360^0
y=cosx-5	-4	-6	1	y Ɛ[-6;-4]	360^0
y=-tanx-3	-2	-4	1	Undefined	180^0
y=-4cosx+7	11	3	4	y Ɛ[3;11]	360^0
y=tanx +5	6	4	1	Ongedefinieërd	180^0
y= -5sinx+2	7	-3	5	y Ɛ[-3;7]	360^0

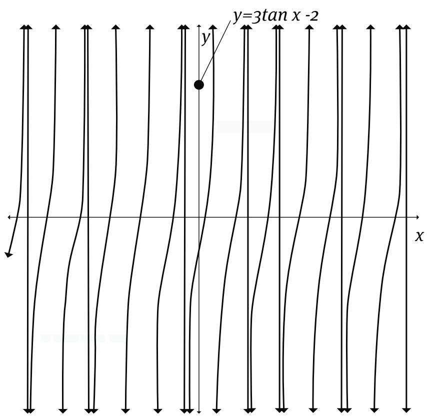
18 18.1



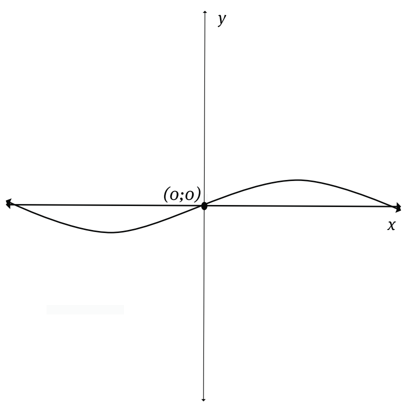
18.2



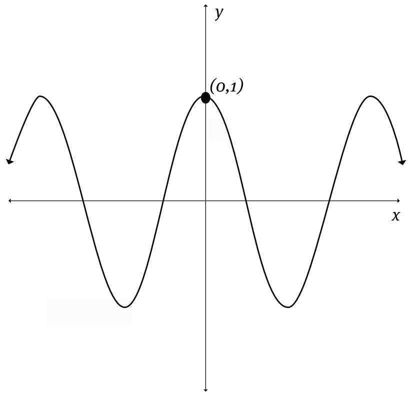
18.3



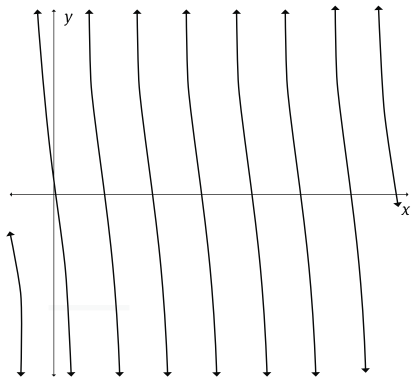
19 19.1 1080⁰ , 1, y Ɛ[-1;1]



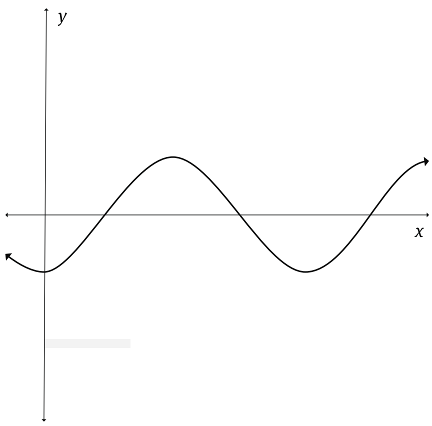
19.2 60^0, 1, y ε[-1;1]



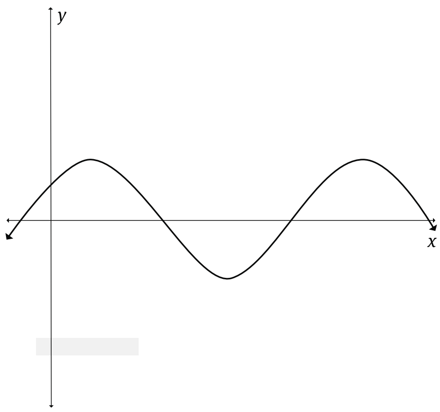
19.3 72^0, 1, ongedefinieërd



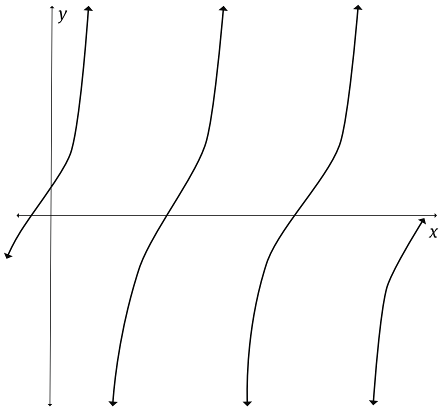
20 20.1



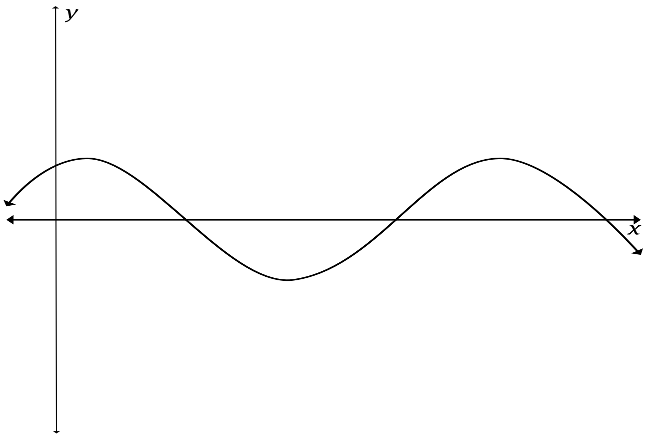
20.2



20.3



20.4



21 A=G
B=E
C=F

22
22.1 y ε [-5;5]
22.2 R(180°; 0,866) and R(270°; 0)
22.3 180^0
22.4 ST = 4,00 eenhede
22.5 h(x) = sin 2(x-75^0) + 2,5

Hoofstuk 6

1
1.1
1.1.1 OA = 13,89
1.1.2 $\sin\alpha = -\frac{12}{13{,}89}$
1.1.3 $\cos\alpha = \frac{7}{13{,}89}$

1.1.4 $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{-12}{13,89}}{\frac{7}{13,89}} = -\frac{12}{7}$

1.1.5 $\tan\alpha = -\frac{12}{7}$

1.2 $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

1.3 $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(-\frac{12}{13,89}\right)^2 + \left(\frac{7}{13,89}\right)^2 = 1$

2 2.1 √(1- cosx)(1+cosx)

= $\sqrt{(1\text{-cosx})^2}$

=1-cosx

2.2 sinx (sinx + tanx.cosx)

=sinx (sinx + sinx.cosx/cosx)

=sinx (2sinx)

=$2\sin^2$x

2.3 $(\cos x + \sin x)^2 + (\cos x - \sin x)^2$

=($\cos^2$x +2cosx.sinx +$\sin^2$x) + ($\cos^2$x - 2cosx.sinx +$\sin^2$x)

=$2\cos^{2X}$ +$2\sin^2$x

=2

2.4 $\cos^2$y + ($\sin^2$y. tany/cosy)

=$\cos^2$y + ($\sin^2$y. (siny/cosy)/cosy)

= $\cos^2$y + ($\sin^2$y. (siny/$\cos^2$y)

=$\cos^2$y + ($\sin^3$y/$\cos^2$y)

3 3.1 3.1.1 x = 90° en x = 270°

3.1.2 RK= 1/cost – $\sin^2$t/cost

=(1-$\sin^2$t)/ cost

=$\cos^2$t/cost

=cost

=LK

3.2 3.2.1 x = 90° en x = 270°

3.2.2 RK= -$\cos^2$b ($\tan^2$b +2)

= -$\cos^2$b ($\sin^2$b/$\cos^2$b +2)

=-$\sin^2$b -2$\cos^2$b

= $\sin^2$b – 2(1-$\sin^2$b)

=-$\sin^2$b -2 +2$\sin^2$b

=$\sin^2$b -2

=LK

3.3 3.3.1 x = 90° aennd x = 270°

3.3.2 RK = $\sin^2\beta$(1+ $\tan^2\beta$)

= $\sin^2\beta$(1+ $\sin^2\beta/\cos^2\beta$)

$= (\sin^2\beta.\cos^2\beta + \sin^4\beta)/\cos^2\beta$
$= (\sin^2\beta(\cos^2\beta + \sin^2\beta)/\cos^2\beta$
$= \sin^2\beta/\cos^2\beta$
$= \tan^2\beta$
$=$LK

3.4 3.4.1 $x = 90^\circ$ en $x = 270^\circ$
3.4.2 LK$= \tan x - \sin x.\cos x$
$= \sin x/\cos x - \sin x.\cos x$
$= (\sin x - \sin x.\cos^2 x)/\cos x$
$= (\sin x(1-\cos^2 x))/\cos x$
$= \sin x(\sin^2 x)/\cos x$
$= \tan x.\sin^2 x$
$=$RK

3.5 3.5.1 $x = 0^\circ$, $x = 180^\circ$ en $x = 360^\circ$
3.5.2 LK$= \sin x - 1/\sin x$
$= (\sin^2 x - 1)/\sin x$
$= -\cos^2 x/\sin x$
$=$RK

4 4.1 4.1.1 $\cos 222^0$
$= \cos(180^0 + 42^0)$
$= -\cos 42^0$
4.1.2 $\sin 48^0$
$= \cos(90^0 - 42^0)$
$= \cos 42^0$

4.2 4.2.1 $\sin 435^0$
$= \sin(360^0 + 75^0)$
$= \sin 75^0$
4.2.2 $\cos 285^0$
$= \cos(360^0 - 75^0)$
$= \cos 75^0$

5 5.1 $\cos 2^0$
$= \cos(90^0 - 88^0)$
$= \sin 88^0 = t$
5.2 $\tan 178^0$
$= \sin 178^0/\cos 178^0$
$= \sin 2^0/\cos 2^0$
$= \sin(90^0 - 88^0)/\cos(90^0 - 88^0)$
$= \cos 88^0/-\sin 88^0$

		$=\cos 88^0/-t$
	5.3	$\cos 92^0$
		$=-\cos(180^0-88^0)$
		$=-\sin 88^0$
		$=-t$
6	6.1	$\tan(360^0+\theta)$
		$=\tan\theta$
	6.2	$\cos(90^0-\theta)$
		$=\sin\theta$
	6.3	$\sin(360^0-\theta)$
		$=-\sin\theta$
	6.4	$\tan(360^0-\theta)$
		$=-\tan\theta$
7	7.1	$\sin 150^0$
		$=\sin(180^0-30^0)$
		$=\sin 30^0$
		$=1/2$
	7.2	$\cos 300^0$
		$=\cos(360^0-60^0)$
		$=\cos 60^0$
		$=1/2$
	7.3	$\tan 390^0$
		$=\tan(360^0+30^0)$
		$=\tan 30^0$
		$=1/\sqrt{3}$
	7.4	$\cos 120^0+\sin 120^0$
		$=\cos(180^0+30^0)+\sin(180^0-60^0)$
		$=-\cos 30^0+\sin 60^0$
		$=-\sqrt{3}/2+\sqrt{3}/2$
		$=0$
	7.5	$(\sin(90^0-x).\cos(180^0+x).\tan(180^0+x))/\cos(90^0-x).\cos(360^0-x).\tan x$
		$=(\cos x.-\cos x.\tan x)/\sin x.\cos x.\tan x$
		$=-\cos x/\sin x$
	7.6	$\sin(-\theta)$
		$=-\sin\theta$
	7.7	$\cos(-360^0-\theta)$
		$=\cos\theta$

8 RK= cos (-x) –sin(x-180^0)
=cosx- (-sinx(180^0-x)
=cosx-(-sinx)
=cosx+sinx
LK= cosx –cosx.tan(-x)
=cosx-cosx.-tanx
=cosx+cosx.sinx/cosx
=cosx +sinx
LK=RK

9 9.1 sinx=-3.125
geen oplossing

9.2 cosx-0.986=0
cosx=0.986
x=9.6^0 + 360^0n of x= 360^0-9.6^0 + 360^0n
x=350.4^0 + 360^0n

9.3 3tanx=2.12
tanx=2.12/3
x=35.2^0+180^0n of x=180^0+35.2^0 +180^0n
x=215.2^0+360^0n

9.4 tanx=sin35^0
tanx=0.57
x=29.68^0+180n of x=180^0+29.68^0 +180^0n
x=209.68^0 + 180^0n

9.5 2cosx+1=0
cosx=-1/2
x=180^0-60^0 +360^0n of x=180^0+60^0+360^0n
x=120^0 +360^0n x=240^0+360^0n

9.6 tan4x=tan90^0
tan90^0 is ongedefinieërd

9.7 sin(5x+30^0)=sinx
5x+30^0=x+360^0n
4x=-30^0+360^0n of 4x=360-(-30^0)+360^0n
x=-7.5^0+90^0n x=97.5^0 +90^0n

9.8 tan(3x-20^0)= tan (x+40^0)
3x-20^0=x+40^0+180^0n
2x=60^0 +180^0n
x=30^0 +90^0n

9.9 3sinx=-5cosx
3tanx=-5

tanx=-5/3
$x=180^0-59.0^0+180^0n$
$x=239.04^0+180^0n$

9.10 5/9 cosx=-sinx
9/5=-tanx
-9/5=tanx
$x=180^0-60.9^0+180^0n$
$x=240.9^0+180^0n$

Hoofstuk 7

1 1.1 $S = 4\prod(12)^2$

$= 156,566$

1.2 $S = 4\prod r^2$

$\therefore 512,157 = 4\prod r^2$

$\therefore r^2 = 40\ 756,15909$

$\therefore r = 201,882$ m

$V = (4/3)\prod r^3$

$= (4/3)\prod(201,882)^3$

$= 845,641\ m^3$

2 2.1 $s = \sqrt{}(h^2 + r^2)$

$= \sqrt{}(51,2^2 + 13,5^2)$

$= \sqrt{}2\ 803,69$

$= 52,950$ cm

2.2 $S = \prod r^2 + \prod rs$

$= \prod(13,5)^2 + \prod(13,5)(52,950)$

$= 2\ 818,244\ cm^2$

2.3 $V = (1/3)\prod r^2h$

$= (1/3)\ \pi(13{,}5)^2(51{,}2)$

$= 9\ 771{,}610\ cm^3$

3 $s = \sqrt{(h^2 + r^2)}$

$= \sqrt{(23^2 + 1{,}25^2)}$

$= \sqrt{530{,}5625}$

$= 23{,}034$ m

$S = 4lh + (1/2)(4ls)$

$= 4(2{,}5)(23) + (1/2)(2{,}5)(23{,}034)$

$= 345{,}170\ m^2$

4 $S_{halfsfeer} = (1/2)(4\pi r^2)$

$= (1/2)(4\pi(13)^2)$

$= 1\ 061{,}86\ cm^2$

$S_{silinder} = \pi r^2 + 2\pi rh$

$= \pi(13)^2 + 2\pi(13)(30)$

$= 2\ 981{,}37\ cm^2$

$\therefore$ Buite-oppervlakte van die blompot: $1\ 061{,}86 + 2\ 981{,}37 = 4\ 043{,}23\ cm^2$

$V_{halfsfeer} = (1/2)(4/3)\ \pi r^2$

$= (1/2)(4/3)\ \pi(13)^2$

$= 353{,}95\ cm^3$

$V_{silinder} = \pi r^2h$

$= \pi(13)^2(30)$

$= 15\ 927{,}87\ cm^3$

$\therefore$ Volume van die blompot: $353{,}95 + 15\ 927{,}87 = 16\ 281{,}82\ cm^3$

Hoofstuk 8

1 1.1 NM = MP (loodr midp na koord)

$\therefore \frac{23,5}{2} = 11,75$ cm

1.2 $OP^2 = OM^2 + MP^2$ (Pyth)

$= 13,5^2 + 11,75^2$

$= 320,3125$

$\therefore$ OP = 17,90 cm

1.3 Deursnee = $2 \times$ OP = 35,8 cm

2 Laat OD = x m

$\therefore$ OK = OM = x + 17 (radiusse)

en KD = DL = 34 m (loodr van midp)

$\therefore KO^2 = OD^2 + KD^2$ (Pyth)

$\therefore (x + 17)^2 = x^2 + 34^2$

$\therefore x^2 + 34x + 289 = x^2 + 1\,156$

$\therefore 34x = 867$

$\therefore x = 25,5$ m

3 In die eerste sirkel:

$x = 56°$ en $y = 248°$

In die tweede sirkel:

$x = 268°$ en $y = 92°$

In die derde sirkel:

$x = 36°$, $y = 36°$ en $z = 288°$

4 4.1 $x = 70°$

$\hat{O}_2 = 290°$

$y = 1/2\ \hat{O}_2 = 145°$

4.2 PL = PM (radiusse)

$\therefore \hat{L}_2 = \hat{M} = 32°$

$\therefore x = 116°$

$\therefore \hat{P}_2 = \hat{P}_1 = 116°$

PK = PL

$\therefore y = \hat{L}_1 = 32°$

5 $\hat{B}_1 = \hat{C}_4$ (selfde boog EG)

$= \hat{C}_1$ (vert teenoorgesteld)

$= \hat{B}_4$ (selfde boog DF)

6 $x = 236°$ (∠e om ‘n punt)

$y = 118°$ (∠ in middel = 2∠ op sirkel)

$z = 118°$ (teenoorg ∠’e van koordevier∠)

7 $x = 75°$ (buite ∠’e van koordevier∠)

$y = 103°$ (teenoorg ∠’e van koordevier∠)

8 $H\hat{F}G = 90°$ (∠ in semi-sirkel)

$\therefore x = 180° - (55° + 90° + 12°) = 23°$ (binne ∠’e van driehoek)

9 9.1 $K\hat{N}M = 90°$ (KN⊥ML)

$L\hat{O}M = 90°$ (LO⊥KM)

$\therefore \hat{O}_1 + \hat{N}_2 = 180°$

$\therefore$ OPNM siklies (teenoorg binne ∠’e)

9.2 $\hat{O}_2 = 90°$ (LO⊥KM)

$= \hat{N}_1$ (KN⊥ML)

∴ KLNO koordevierhoek (KL onderspan = ∠'e)

∴ $\hat{K}_1 = \hat{L}_2$

10 10.1 $S\hat{L}R = 155° - (S\hat{L}K + R\hat{L}P)$ (aangrensende ∠'e)

∴ $x = 155° - (90° + 23°)$ (radius OL ⊥ raaklyn KM)

$= 42°$

$S\hat{R}L = 90°$ (∠ in half-sirkel)

∴ $y = 50°$ (Binne ∠'e van ΔSRL aanv)

∴ $z = 130°$ (teenoorg binne ∠'e koordevierhoek)

10.2 $x = \hat{L}_2 = \hat{L}_1 = 40°$ (onderspan deur = koorde)

$y = G\hat{L}K = 80°$ (selfde koord GK)

$z = \hat{L}_2 = 40°$ (∠ tussen raaklyn en koord GH)

10.3 $x = 60°$ (∠ tussen raaklyn en koord BF)

$\hat{B}_2 = 60°$ (∠'e gelykbenige driehoek)

$y = 60°$ (binne ∠'e van aanvullende)

$z = 60°$ (∠ tussen raaklyn en koord BG)

10.4 $x = \hat{B}_2 = 30°$ (∠ tussen raaklyn en koord BS)

$y + x = 48°$ (buite ∠'e van ΔRST)

∴ $y = 18°$

$R\hat{S}B = 90°$ (∠ in semi-sirkel)

∴ $x = \hat{S}_2 = 72°$ (∠ tussen raaklyn en koord BG)

11 $\hat{Z} = \hat{V}_1$ (∠ tussen raaklyn WV en koord YV)

$= \hat{V}_2$ (vert teenoorg ∠'e =)

$= \hat{T}$ (∠ tussen raaklyn XV en koord UV) or

^Y = ^V_3	(∠ tussen raaklyn VX en koord ZV)
= ^V_6	(vert teenoorg ∠'e =)
= ^U	(∠ tussen raaklyn WV en koord TV)
∴ YZ || TU	(verw ∠'e =)

Hoofstuk 9

1 1.1 Area van ΔRPS = $\frac{1}{2}(14)(14)\sin 35°$

$= 56{,}21\ cm^2$

$\hat{R} = \frac{180°-35°}{2} = 72{,}5°$

$\therefore P\hat{S}T = 107{,}5°$

Area van ΔPST= $\frac{1}{2}(10{,}5)(14)\sin 107{,}5°$

$= 63{,}00\ cm^2$

1.2 Area van ΔPQR = $\frac{1}{2}(17)(11)\sin 123{,}4°$

$= 78{,}06\ cm^2$

2 Area ΔBDC $\frac{1}{2}CD.BC.\sin C = 109$ vierkante eenhede

$\frac{1}{2}(24)(19) = 109$

$\sin C = \frac{109}{228}$

$C = 28{,}56°$

$\frac{AB}{19} = \tan 28{,}56°$

$\therefore AB = 19\tan 28{,}56° = 10{,}34$ eenhede

3 3.1 $\frac{\sin D}{33} = \frac{\sin 82°}{42}$

$\sin D = \frac{33\sin 82°}{42}$

$\sin D = 0{,}778067768$

$\therefore D = 51{,}08°$

$\therefore F = 46{,}92°$

$\frac{DE}{\sin 46{,}92°} = \frac{42}{\sin 82°}$

$DE = \frac{42 \sin 46{,}92°}{\sin 82°}$

$= \ 30{,}98$

3.2 $\hat{R} = 78°$

$\frac{ST}{\sin 78°} = \frac{28}{\sin 60°}$

$ST = \frac{28 \sin 78°}{\sin 60°}$

$= 31{,}63\ mm$

$\frac{SR}{\sin 42°} = \frac{31{,}63}{\sin 60°}$

$SR = \frac{31{,}63 \sin 42°}{\sin 60°}$

$= 24{,}44\ mm$

4 4.1 $\frac{EF}{\sin 15°} = \frac{21{,}3}{\sin 128°}$

$EF = \frac{21{,}3 \sin 15°}{\sin 128°} = 6{,}99$

4.2 Area $\Delta\text{HEF} = \frac{1}{2}(21{,}3)(6{,}99) \sin 37°$

$= 44{,}80\ cm^2$

4.3 $\frac{\sin HFG}{13{,}9} = \frac{\sin 15°}{6{,}99}$

$\sin HFG = \frac{13{,}9 \sin 15°}{6{,}99} = 0{,}514675926$

$\therefore HFG = 30{,}98°$

5 5.1 $AC^2 = 49^2 + 32^2 - 2(49)(32) \cos 58{,}4° = 1\,781.780199$

$\therefore AC = 42{,}21\ cm$

$\frac{\sin A}{49} = \frac{\sin 58{,}4°}{42{,}21}$

$\sin A = \frac{49 \sin 58{,}4°}{42{,}21} = 0{,}988737734$

$A = 81{,}39°$

$\therefore C = 40{,}21°$

5.2 $16^2 = 9^2 + 9^2 - 2(9)(9) \cos J$

$\cos J = \frac{9^2+9^2-12^2}{2(9)(9)} = 0{,}111111111$

$\therefore J = 83{,}62°$

$K = M = 48{,}19°$

6 $w^2 = v^2 + x^2 - 2vx\cos W$

$2vx\cos W = v^2 + x^2 - w^2$

$\cos W = \frac{v^2+x^2-w^2}{2vx}$

7 $AC^2 = 12{,}5^2 + 9{,}3^2 - 2(12{,}5)(9{,}3)\cos 124{,}7° = 375{,}0974892$

$\therefore AC = 19{,}37\ cm$

8 8.1 50° [ko-binne ∠'e; PQ||SR]

8.2 $\frac{\sin PRS}{18} = \frac{\sin 50°}{23{,}5}$

$\sin PRS = \frac{18\sin 50°}{23{,}5}$

$\therefore PRS = 35{,}93°$

8.3 $C\hat{A}D = 94{,}07°$

Area ΔPSR $= \frac{1}{2}(18)(23{,}5)\sin 94{,}07° = 210{,}97\ cm^2$

8.4 Area ΔPQR = Area ΔPSR $= 210{,}97\ cm^2$

$\frac{1}{2}PR.QT =$ Area ΔPQR

$\frac{1}{2}(23{,}5)QT = 210{,}97$

$\therefore QT = 17{,}95\ cm$

9 9.1 $RS = \frac{1}{2}.x.AR\ sin\theta$

9.2 $AR = \frac{1}{2}.x.RS\cos\theta$

10 10.1 $DBA = y$ [verw ∠'e]

$\therefore \frac{AB}{DB} = \cos y$

$\therefore AB = DB\cos y$ ....(1)

$C = 90° - x$

$\therefore \frac{BD}{\sin(90°-x)} = \frac{15}{\sin(x+y)}$

$\frac{BD}{\cos x} = \frac{15}{\sin(x+y)}$

$\therefore BD = \frac{15\cos x}{\sin(x+y)}$................(2)

Deur (2) in (1) te sit:

$AB = \frac{15\cos x\cos y}{\sin(x+y)}$

10.2 $AB = \frac{15\cos 12°\cos 30°}{\sin(12°+30°)}$

$= 18{,}99$

11 K = 90°

In ΔKLM, $LM = \sqrt{x^2 + 124{,}10}$

In ΔKOB, $LO = \sqrt{x^2 + 3{,}71}$

$OM^2 = LO^2 + LM^2 - 2(LO)(LM)\cos y$

$\therefore 55{,}20 =$

$\left(\sqrt{x^2+3{,}71}\right)^2 + \left(\sqrt{x^2+124{,}10}\right)^2 - 2\left(\sqrt{x^2+3{,}71}\right)\left(\sqrt{x^2+124{,}10}\right)\cos y$

$\therefore 2\left(\sqrt{x^4 + 128{,}41x^2 + 460{,}41}\right)\cos y = 2x^2 + 72{,}61$

$\therefore \cos y = \frac{x^2+36{,}31}{\sqrt{x^4+128.41x^2+460{,}41}}$

Hoofstuk 10

1 1.1 R171 000,27

1.2 R162 501,29

$\therefore$ Belegging A bied meer na 7 jaar.

2 A = 999 822; n = 10; i = 3,2%

$\therefore 999\ 822 = P(1 + 0{,}032/12)^{120}$

$\therefore 999\ 822 = P(1{,}376541357)$

$\therefore P = R726\ 329{,}07$

3 $n = 4$; $A = 4P$; $m = 4$

$A = P(1 + i/4)^{16}$

$\therefore 4P = P(1 + i/4)^{16}$

$\therefore 4 = (1 + i/4)^{16}$

$\therefore {}^{16}\sqrt{4} = 1 + i/4$

$\therefore {}^{16}\sqrt{4} - 1 = i/4$

$\therefore i = ({}^{16}\sqrt{4})/4 = 0{,}0226 = 2{,}26\%$

4 Ons moet terugwerk van die oorspronklike belegging.

$3\ 111\ 052 = P(1 + 0{,}075/365)^{2\ 555}$

$\therefore 3\ 111\ 052 = 1{,}690367683P$

$\therefore P = R1\ 840\ 458{,}75$

$R1\ 840\ 458{,}75 + R19\ 201{,}85 = R1\ 859\ 660{,}60$

$\therefore 1\ 859\ 660{,}60 = P(1 + 0{,}12/12)^{24}$

$\therefore 1\ 859\ 660{,}60 = P(1{,}269734649)$

$\therefore P = R1\ 464\ 605{,}70$

$\therefore x = R1\ 464\ 605{,}70$

5 Ons moet weer terugwerk..

$5\ 825\ 156 = P(1 + 0{,}124/12)^{156}$

$\therefore 5\ 825\ 156 = P(4{,}971533121)$

$\therefore P = R1\ 171\ 702{,}14$

$1\ 171\ 702{,}14 = P(1 + 0{,}09/1)^{6}$

$\therefore 1\ 171\ 702{,}14 = P(1{,}677100111)$

$\therefore P = R698\,647{,}70$

$\therefore$ Larisse se oorspronklike belegging was R698 647,70.

6 $47\,540{,}04 = 39\,015{,}43(1 + i/4)^{12}$

$\therefore 1{,}218493299 = (1 + i/4)^{12}$

$\therefore \sqrt[12]{1{,}218493299} = 1 + i/4$

$\therefore 1{,}016604268 = 1 + i/4$

$\therefore i = 0{,}0664 = 6{,}64\%$

7 7.1 $A = 10\,000(1 + 0.0432/4)^{60}$

$= 19\,050{,}83$

7.2 $i_{eff} = (1 + 0{,}0432/4)^4 - 1$

$0{,}0439 = 4{,}39\%$

7.3 $A = 10\,000(1 + 0{,}0439/4)^{60}$

$= 19\,249{,}74$

Nee, die effektiewe jaarlike koers gee 'n hoer waarde.

8 8.1 3% of 1 650 kg = 49,5 kg per dag

$A = P(1 - in)$

$\therefore 0 = 1\,650(1 - 0{,}03n)$

$\therefore 0 = 1\,650 - 49{,}5n$

$\therefore n = 33{,}33$

Hulle sal saad vir arm woongebiede kan gee vir 33 dae.

8.2 $A = P(1 - in)$

$\therefore 132 = 1\,650(1 - 0{,}08n)$

$\therefore 132 = 1650 - 132n$

$\therefore 132n = 1518$

$\therefore n = 11{,}50$

$\therefore$ Hulle sal 132 kg mielie-saad na 11,5 dae hê.

8.3 $A = P(1 - in)$

$\therefore 0 = 1\,650(1 - i.75)$

$\therefore 0 = 1\,650 - 123\,750i$

$\therefore 123\,750i = 1\,650$

$\therefore i = 0{,}0133 = 1{,}33\%$

$\therefore$ Hulle moet 1,33% per dag weggee om seker te maak die saad hou vir 75 dae.

9 9.1 $A = P(1 - i)^n$

$\therefore A = 2\,605\,252(1 - 0{,}125)^7$

$= 1\,023\,071{,}79$

9.2 $650\,000 = 2\,605\,252(1 - i)^4$

$\therefore 0{,}249496018 = (1 - i)^4$

$\therefore \sqrt[4]{0{,}249496018} = 1 - i$

$\therefore 0{,}706750142 = 1 - i$

$\therefore i = 0{,}2932 = 29{,}32\%$

10 $A = P(1 - i)^n$

$\therefore 1\,260 = P(1 - 0{,}15)^4 = 0{,}52200625P$

$\therefore P = 2\,413{,}76$

11 11.1 11.1.1 $A = P(1 - i)^n$

$\therefore A = 1\,250\,000(1 - 0{,}17)^5$

$= 492\,380{,}08$

11.1.2 $A = 1\,250\,000(1 + 0{,}0602)^5 = 1\,674\,360{,}66$

11.1.3 R1 674 360,66 – 492 380,08 = R1 181 980,58

11.2 $A = 75\ 000(1 + 0{,}12/12)^{24} = 95\ 230{,}10$

Nee, hulle sal nog

R1 181 980,58 – 95 230,10 = R1 086 750,48 nodig hê.

12 Kom ons kyk eers wat die rekenaars sal kos oor 2,5 jaar:

$A = 45\ 000(1 + 0{,}0726)^{2{,}5} = 53\ 617{,}55$

Kom ons kyk nou wat die belegging sa werd wees oor 2,5 jaar:

$A = 8\ 000(1 + 0{,}15/52)^{130} = 11\ 633{,}65$

∴ Nee, hulle sal nie genieg geld hê om die rekenaars te vervang nie. Hulle sal nog

R53 617,55 – 11 633,65 = R4 198,39 kortkom.

Hoofstuk 11

1 1.1 S = {(1,H); (2,H); (3,H); (4,H); (5,H); (6,H); (1,T); (2,T); (3,T); (4,T); (5,T); (6,T)}

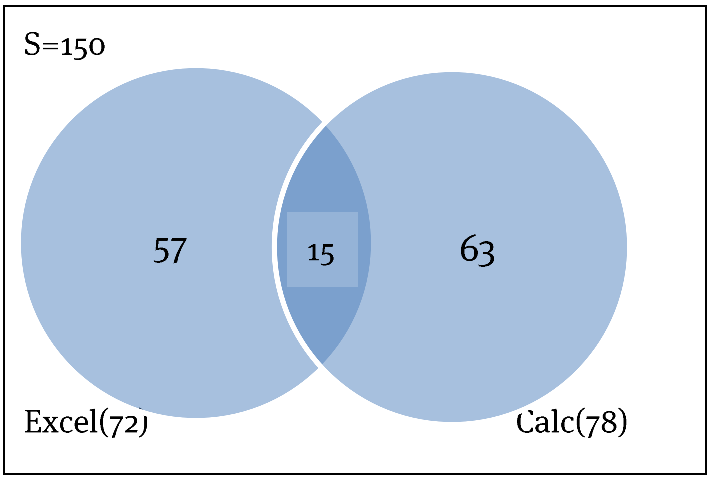
1.2 1.2.1 P(onewe en kop) $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

1.2.2 P(priem en stert) $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

1.2.3 P(minder as 5 en kop) $= \frac{4}{12} = \frac{1}{3} = 0{,}333$

1.2.4 P(ewe en stert) $= \frac{3}{12} = \frac{1}{4} = 0{,}25$

2 2.1



2.1	2.1.1	15	2.1.2	63	2.1.3	57	2.1.4	15
2.2	2.2.1	$\frac{15}{50} = 0{,}1$	2.2.2	$\frac{63}{150} = 0{,}42$	2.2.3	$\frac{57}{150} = 0{,}38$	2.2.4	$\frac{15}{50} = 0{,}1$

3 3,1 P(minder as 4) $= \frac{4}{5} = 0{,}8$

3.2 P(meer as 4) $= \frac{1}{5} = 0{,}2$

3.3 P(minder of gelyk aan 4) $= \frac{2}{5} = 0{,}4$

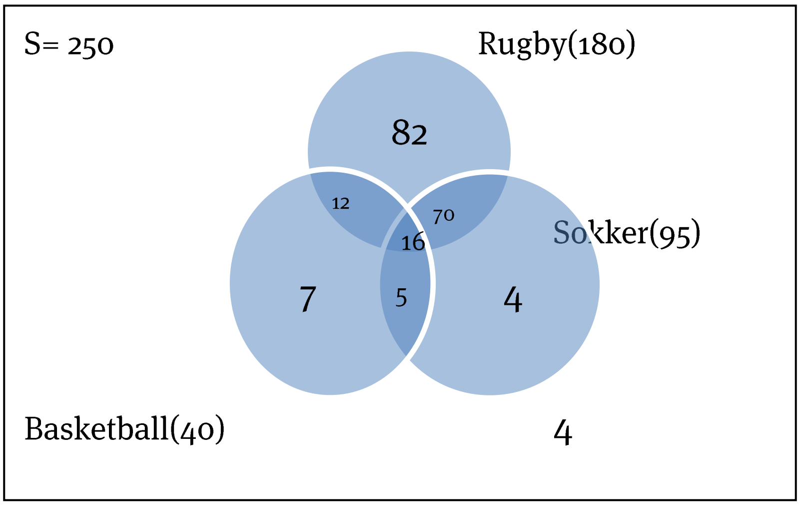
3.4 P(deelbaar deur 3) $= \frac{1}{5} = 0{,}2$

3.5 P(nie deelbaar deur 3) $= \frac{4}{5} = 0{,}8$

3.6 3.4 en 3.5 is mekaar se komplemente.

3.1 en 3.3 is nie mekaar se komplemente nie.

4 4.1



4.2 4 lede

4.3 16 lede

4.4 41,2%

5 $P(A) = \frac{2}{5}$; $P(B) = \frac{5}{12}$; $P(C) = \frac{1}{3}$

Kom ons toet vir wedersydse uitsluitendheid:

$P(A) \times P(B) = \frac{1}{6}$

$P(A) \times P(C) = \frac{2}{15}$

$P(B) \times P(C) = \frac{5}{36}$

5.1 $P(A \text{ of } C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C)$

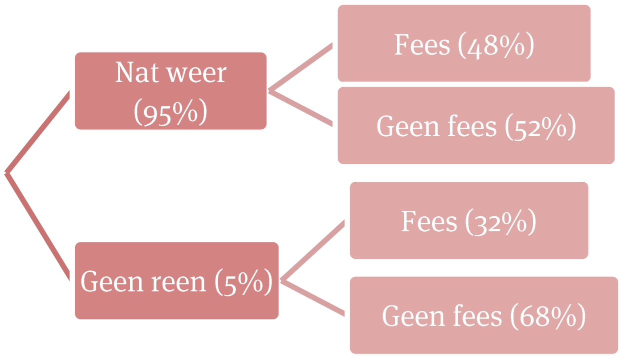
$= \frac{2}{5} + \frac{1}{3} - \frac{2}{15} = \frac{3}{5} = 0{,}6$

5.2 $P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$\frac{2}{5} + \frac{5}{12} - \frac{1}{6} = \frac{13}{20} = 0{,}65$

$\therefore 1 - P(A \text{ of } B) = 1 - 0{,}65 = 0{,}35$

6 6.1



6.2 6.2.1 P(fees) = 0,95 × 0,48 + 0,05 × 0,32 = 0,472 = 47,2%

6.2.2 P(geen fees in nat weer) = 0,95 × 0,52 = 0,494 = 49,4%

7 7.1

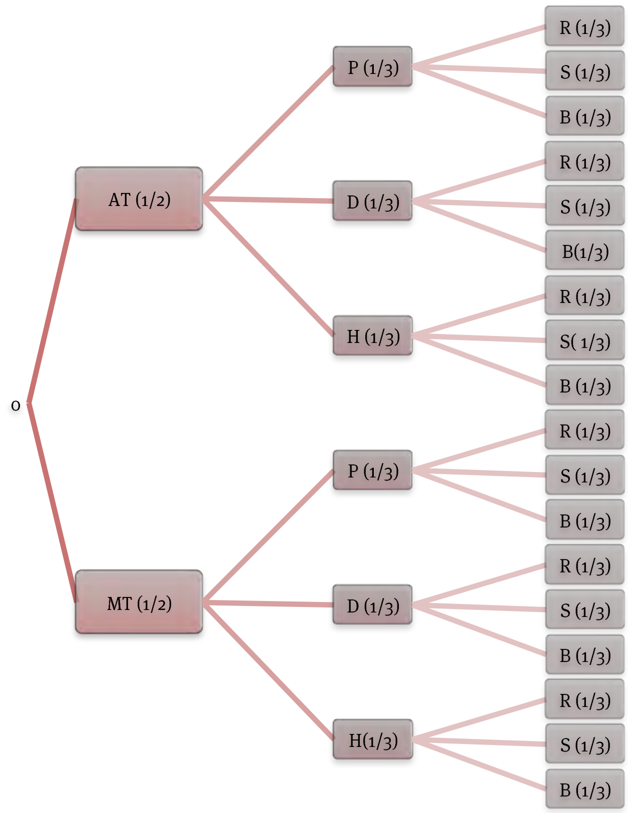
	Meer as 5 koppies	Minder as 5 koppies	Totaal
Vroulik	**672**	1 565	**2 237**
Manlik	1 485	**1 173**	2 658
Totaal	2 157	**2 738**	4 895

7.2 7.2.1 P(vroulik drink meer as 5 koppies 'n dag) = $\frac{672}{4895} = 0{,}1373$

7.2.2 P(vroulik) = $\frac{2237}{4895} = 0{,}4570$

7.2.3 P('n person drink meer as 5 koppies 'n dag) = $\frac{2157}{4895} = 0{,}4407$

8 8.1



8.2 8.2.1 P(swart) $= \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

8.2.2 P(AR met H) $= \frac{1}{6}$

8.2.3 P(HR met D en R) $= \frac{1}{18}$

8.2.4 P(P met S) $= \frac{1}{3}$

Hoofstuk 12

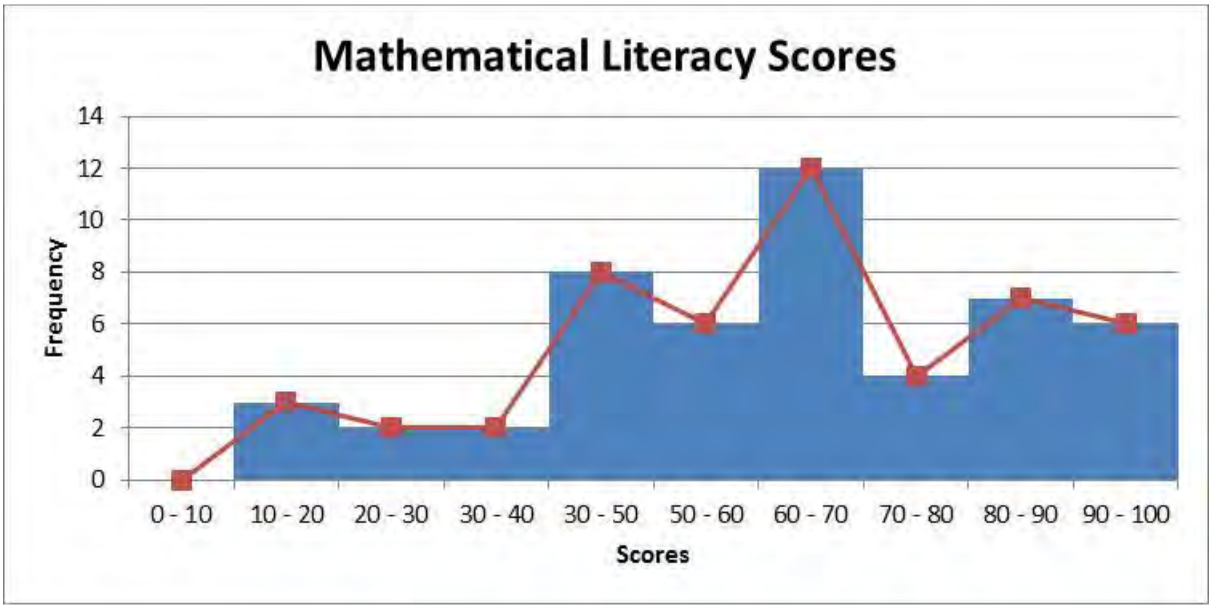
1 1.1

Interval	Frekwensie
$0 \leq x < 10$	0
$10 \leq x < 20$	3
$20 \leq x < 30$	2
$30 \leq x < 40$	2
$40 \leq x < 50$	8
$50 \leq x < 60$	6
$60 \leq x < 70$	12
$70 \leq x < 80$	4
$80 \leq x < 90$	7
$90 \leq x < 100$	6

1.2 Modus = 82

1.3 Die median is in die klasinterval $60 \leq x < 70$.

1.4 en 1.5



2 2.1

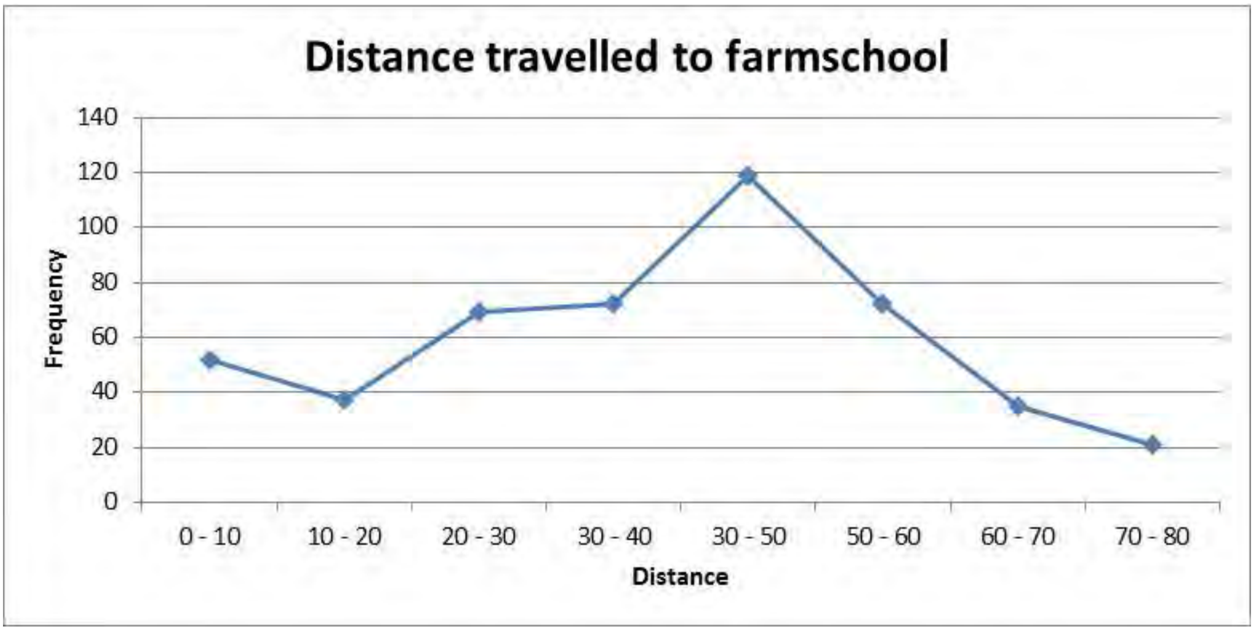
Interval	Frekwensie
$0 \leq x < 10$	52
$10 \leq x < 20$	37
$20 \leq x < 30$	69
$30 \leq x < 40$	72
$40 \leq x < 50$	119
$50 \leq x < 60$	72
$60 \leq x < 70$	35
$70 \leq x < 80$	21

Geskatte gemiddelde:

$$\frac{52\times5+37\times15+69\times25+72\times35+119\times45+72\times55+35\times65+21\times75}{477} = 38{,}21$$

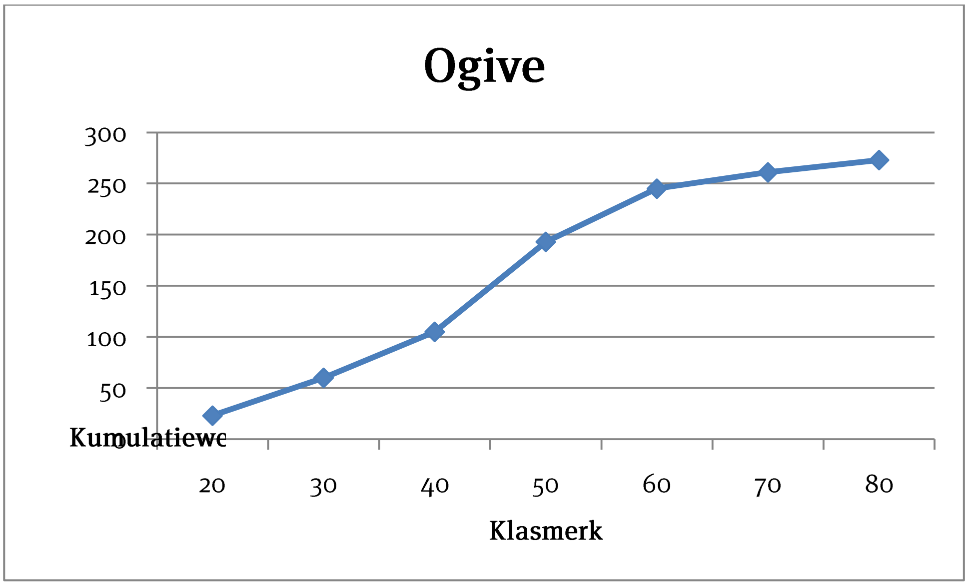
2.2 Modale klas = $60 \leq x < 70$

2.3



3

Interval	Frekwensie	Kumulatiewe Frekwensie	Datapunt
$0 \leq x < 10$	23	23	(20; 23)
$10 \leq x < 20$	37	60	(30; 60)
$20 \leq x < 30$	45	105	(40; 105)
$30 \leq x < 40$	88	193	(50; 193)
$40 \leq x < 50$	52	245	(60; 245)
$50 \leq x < 60$	16	261	(70; 261)
$60 \leq x < 70$	12	273	(80; 273)



4 4.1 124 bestuurders

4.2 94 bestuurders

4.3

Interval	Frekwensie	Kumulatiewe frekwensie
11 – 15	5	5
15 – 20	25	30
20 – 25	0	30
25 – 30	65	95
30 – 35	21	116
35 - 40	8	124

5 $s^2 = \sum \frac{(x_i - \overline{x})}{n}$

$\boldsymbol{x_i}$	$\boldsymbol{x_i - \overline{x}}$	$\boldsymbol{(x_i - \overline{x})^2}$
155	0,11	0,0121
142	-12,89	166,1521
169	14,11	199,0921
133	-21,89	479,1721
189	34,11	1 163,4921
128	-26,89	723,0721
175	20,11	404,4121
168	13,11	171,8721
135	-19,89	395,6121

$\sum x_i = 1\ 394$

$x_i = 154{,}89$

$s^2 = \frac{3702{,}8889}{9} = 411{,}4321$

$\therefore$ s = 20,2838

6 6.1 6 800

6.2 250

6.3 Minder as een, wat nie moontlik is nie, dus geen.

6.4 Nee.

7 Die Wiskunde redakteur is relatief meer duur.

8 8.1 Gemiddeld = 130,2 sekondes

8.2 $s^2 = \frac{1945{,}6}{10} = 194{,}56$

$\therefore$ s = 13,95

8.3 9,5 ≈ al 10 die studente

9 9.1 Min = 15

$Q_1 = 30$

Mediaan = 45

$Q_3 = 60$

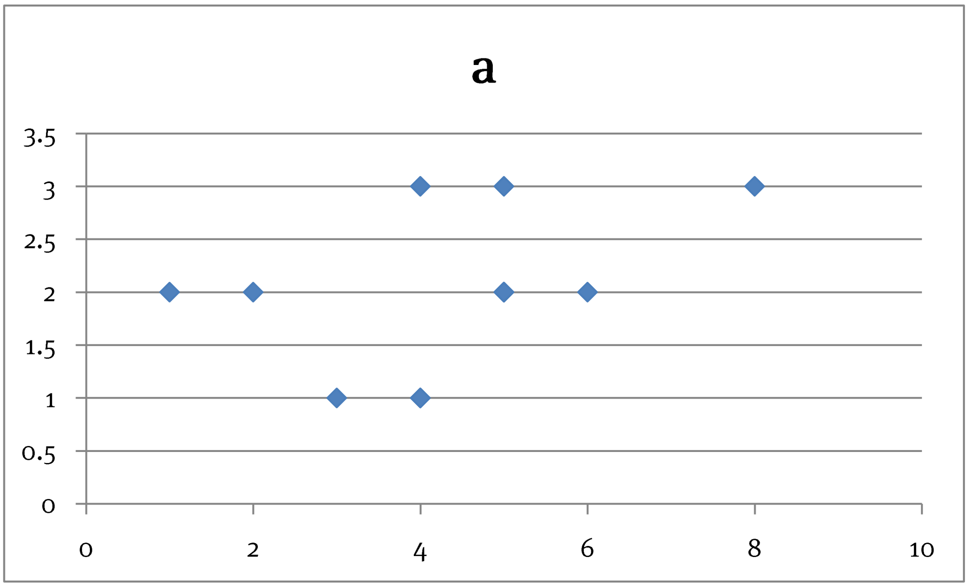
Maks = 100

9.2 Interkwartielvariasiewydte = 156

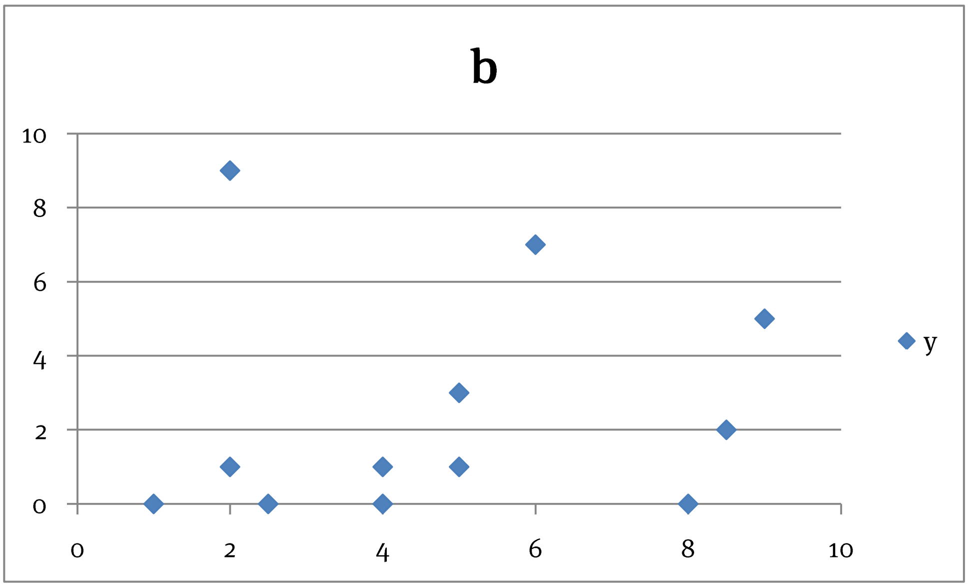
9.3 Die data is eweredig versprei.

9.4 Die data is simmetries.

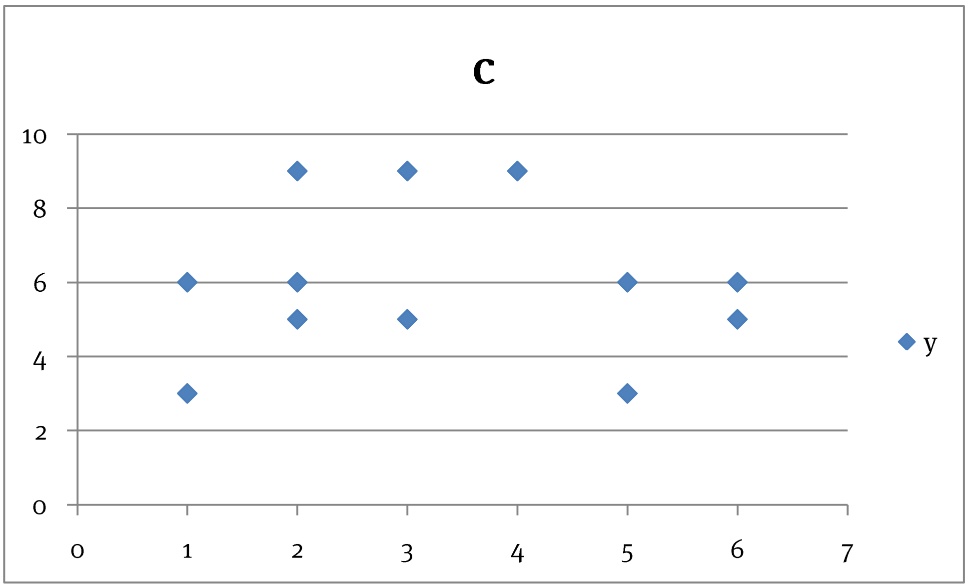
10 10.1



10.2



10.3



Antwoorde op Wiskundevraestel 1

VRAAG 1

1.1 1.1.1 $9x(x-6) = 15$

$\therefore 9x^2 - 54x - 15 = 0$

$3x^2 - 18x - 5 = 0$

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{18 \pm \sqrt{384}}{6}$

$x = 6{,}27$ of $x = -0{,}27$

1.1.2 $x^2 - 4x \geq -4$

$x^2 - 4x + 4 \geq 0$

$(x-2)(x-2) \geq 0$

$x - 2 \geq 0$

$x \geq 2$

1.1.3 $\frac{1}{2}x^2 - 17x = 5$

$\frac{1}{2}x^2 - 17x - 5 = 0$

$x^2 - 34x - 10 = 0$

$x = \frac{34 \pm \sqrt{1196}}{2}$

$x = 34{,}29$ of $x = -0{,}29$

1.2 1.2.1 $x \neq 9$, want dit sal die noemer 0 maak, wat ongedefinieërd is.

1.2.2 Nee. $3^2 = 9$

1.2.3 $\frac{1}{x-9} + 2 = \frac{3x}{9-x}$

$\frac{1}{x-9} + 2 + \frac{3x}{x-9} = 0$

$1 + 2x - 18 + 3x = 0$

$5x = 17$

$x = \frac{17}{5}$

1.3 1.3.1 $2x + 2y = 2 \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$

$2x^2 + 4y^2 = 4 \ldots\ldots\ldots (2)$

Van 1: $2x = 2 - 2y$

$x = 1 - y \ldots\ldots (3)$

(3) in (2): $2(1-y)^2 + 4y^2 = 4$

$2(1+y^2-2y) + 4y^2 = 4$

$2 + 2y^2 - 4y + 4y - 4 = 0$

$2y^2 - 2 = 0$

$y^2 - 1 = 0$

$(y-1)(y+1) = 0$

$y = 1$ of $y = -1$

$y = 1$ in (1): $2x + 2 = 2$ $\quad$ $y = -1$ in (1): $2x - 2 = 2$

$x = 0$ $\quad$ $x = 2$

1.3.2 $4x^2 + 6y - 5 = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$

$2x^2 - 7y = 15y \ldots\ldots\ldots (2)$

Van (2): $2x^2 = 22y$

$x^2 = 11y \ldots\ldots\ldots (3)$

(3) in (1): $4(11y) + 6y - 5 = 0$

$44y + 6y - 5 = 0$

$50y = 5$

$y = \frac{1}{10} \ldots\ldots\ldots (4)$

(4) in (2): $2x^2 - 7\left(\frac{1}{10}\right) = 15\left(\frac{1}{10}\right)$

$2x^2 = \frac{15}{10} - \frac{7}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}$

$x^2 = \frac{2}{5}$

$x = \frac{2}{5}$ of $x = -\frac{2}{5}$

1.4 Die oppervlak van die hoenderhok word vergroot met 'n faktor van 3,6. Die omtrek van die nuwe hoenderhok is $2 \times 1{,}2x + 2 \times 3y = 2{,}4x + 6y$.

VRAAG 2

2.1 2.1.1 $\frac{(4x)^{-3}}{4x^{-2}} = \frac{4x^2}{4x^3} = \frac{1}{4x}$

2.1.2 $\sqrt[3]{512x^{15}} + \sqrt[3]{27x^{15}} = 8x^5 + 3x^5 = 11x^5$

2.1.3 $\sqrt{5}(\sqrt{5} + \sqrt{10}) - \sqrt{4}$

$= 5 + \sqrt{5}\sqrt{10} - 2$

$= 3 + \sqrt{5}\sqrt{10}$

2.2 2.2.1 $4.4^x = 1024$

$4^x = 256 = 4^4$

$x = 4$

2.2.2 $7^x - 7^{x+1} = -42$

$7^x - 7^x.7^1 = -6.7$

$7^x(1-7) = -6.7$

$7^x(-6) = -6.7$

$x = 1$

2.2.3 $2.3^{-x} = 54$

$2.3^{-x} = 2.27 = 2.3^3$

$x = -3$

VRAAG 3

3.1 3.1.1 65

3.1.2 $T_n = 2n^2 + 3n$

3.1.3 $T_{16} = 2(16)^2 + 3(16) = 560$

3.1.4 $779 = 2n^2 + 3n$

$2n^2 + 3n - 779 = 0$

$n = \frac{-3 \pm \sqrt{6241}}{4}$

$n = 19$ or $n = -25$

(onmoontlik)

∴Die 19de reëling.

3.2 3.2.1 a = 6; b = 22

3.2.2 $T_1 = 1 = a + b + c$ …………(1)

$T_2 = 6 = 4a + 2b + c$……….(2)

$T_3 = 13 = 9a + 3b + c$ …….(3)

(2) – (1): 5 = 3a + b

∴ b = 5-3a ………….(4)

(3) – (2): 7 = 5a + b ……….(5)

(4) in (5): 7 = 5a + 5 – 3a

∴ 2 = 2a

∴ a = 1

a in (5): 7 = 5 + b

a en b in (1): 1 = 1 + 2 + c

$\therefore c = -2$

$\therefore T_n = n^2 + 2n - 2$

VRAAG 4

4.1 4.1.1 $0 = 350\,000(1 - 0{,}18n)$

$\therefore 0 = 350\,000 - 63\,000n$

$\therefore 63\,000n = 350\,000$

$\therefore n = 5{,}56 \approx 5$ en-'n-half jaar

4.1.2 $A = 350\,000(1 - 0{,}25)^4$

$= 110\,742{,}19$

4.2 Veronderstel die leningsperiode is 10 jaar, en die lening is R10 000.

Lening 1: $A = 10\,000(1 + 0{,}12/2)^{20} = 32\,071{,}35$

Lening 2: $A = 10\,000(1 + 0{,}1/4)^{40} = 26\,850{,}64$

$\therefore$ Lening 2 sal minder kos.

4.3 $A = 78\,000(1 + 0{,}12/12)^{24} = 99\,039{,}30$

R99 039,30 – 65 000 = R34 039,30

$A = 34\,039{,}30(1 + 0{,}08/4)^{12} = 43\,170{,}06$

$A = 43\,170{,}06(1 + 0{,}19/2)^4 = 62\,063{,}91$

$\therefore$ Danie sal R62 063,91 hê.

VRAAG 5

5.1 (-3; -6)

5.2 $f(x) = -\frac{3}{4}(x+3)^2 - 6 = 0$

$-\frac{3}{4}(x^2 + 6x + 9) - 6 = 0$

$-\frac{3}{4}x^2 - 4{,}5x - 12{,}75 = 0$

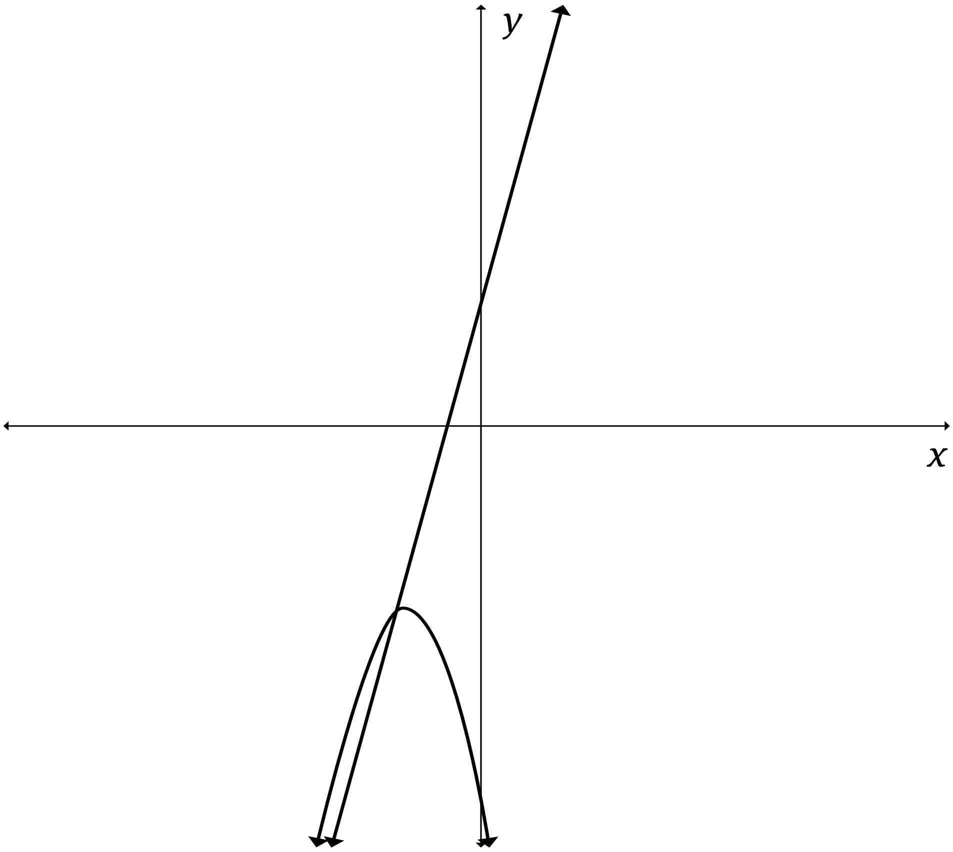
$x^2 + 6x + 17 = 0$

$x = \frac{-6 \pm \sqrt{-32}}{2}$

$\therefore$ f(x) het geen wortels nie.

5.3 x = -3

5.4



5.5 $f(x+3) = -\frac{3}{4}[(x-3)+3]^2 - 6 = 0$

$= -\frac{3}{4}x^2 - 6 = 0$

$\therefore \mathrm{h(x)} = -\frac{3}{4}x^2 - 6$

5.6 k(x) = -6x + 5

VRAAG 6

6.1 A(3; -2) en B(1; 5)

6.2 y = -3

6.3 x ∊ R; x ≠ -2

6.4 $r(x) = s(x)$

$\frac{5}{x+2} - 3 = x + 4$

$\frac{5}{x+2} = x + 7$

$5 = (x+7)(x+2) = x^2 + 9x + 14$

$x^2 + 9x + 9 = 0$

$x = \frac{-9 \pm \sqrt{45}}{2}$

$\therefore x = -1{,}15$ of $x = -7{,}85$

$r(-1{,}15) = 2{,}88$

$r(-7{,}85) = -3{,}85$

6.5 $-y = x + 4$

$\therefore y = -x - 4$

6.6 $y = \frac{5}{-x+2} + 3$

$= -\frac{5}{x-2} + 3$

6.7 $r(2) = \frac{5}{4} - 3 = -1{,}75$

$\therefore H(2;\ -1{,}75)$

VRAAG 7

7.1 $y = 3^{0-2} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$

$\therefore AB = 3 - \frac{1}{9} = 2\frac{8}{9}$

7.2.1 By punt E:

$n(2) = 3^{1-2} = 1/3$

$\therefore E(2;\ 1/3)$ en $A(0;\ 3)$

$\therefore m_{AE} = (3 - 1/3)/(0 - 2) = -1\ 1/3$

7.2.2 By punt D:

$m(2) = 3^{2-2} = 1$

$\therefore D(2;\ 1)$ en $B(0;\ 1/9)$

$\therefore m_{BD} = (1/9 - 2)/(0 - 1) = 1\ 8/9$

7.2.3 Die kurwes is ewe steil.

Antwoorde op Wiskundevraestel 2

VRAAG 1

1.1 $m_{RQ} = \frac{-3-3}{-3+6} = -2$

1.2 Van punt R: $3 = -2(-6) + c$

$\therefore c = -9$

$\therefore y = -2x - 9$

1.3 $m_{SP} = \frac{0-9}{5-3} = -4{,}5$

∴ Hulle is nie parallel nie, want die gradient is nie dieselfde nie.

1.4 tan θ = 3/8

∴ θ = 20,56°

VRAAG 2

2.1 $BC = \sqrt{(3-3)^2 + (6-1)^2}$

$= \sqrt{25}$

$= 5$

2.2 $m_{AB} = \frac{-2-5}{-2-4} = 1{,}17$

$\therefore\ m_{CD} = -0{,}85$

$\therefore y - 2 = -0{,}85(x-4)$

$\therefore y = -0{,}85x + 5{,}4$

2.3 $AC = \sqrt{(-2-4)^2 + (-2-2)^2}$

$= \sqrt{52}$

$= 7{,}21$

$AC = \sqrt{(-2-4)^2 + (-2-5)^2}$

$= \sqrt{85}$

$= 9{,}22$

Dit is nie 'n gelykbenige driehoek nie.

VRAAG 3

3.1 C^BD = 180° - (180° - y + x) = y – x

3.2 $\frac{12}{\sin(y-x)} = \frac{BD}{\sin(90°+x)} = \frac{BD}{\cos x}$

$\therefore BD = \frac{12\cos x}{\sin(y-x)}$

3.3 $\frac{AB}{DB} = \sin y$

$\therefore AB = \frac{12\cos x \sin y}{\sin(y-x)}$

3.4 $AB = \frac{12\cos 43{,}21°.\sin 38°}{\sin(38°-43{,}21°)} = 71{,}30\ m$

VRAAG 4

4.1 Oppervlakte van pizza $= 6 \times (\frac{1}{2}.7.7.\sin 60°) = 127{,}31\ cm^2$

4.2 Kant-lengte van 5de pizza: 7 -0,5 – 0,5 – 0,5 – 0,5 = 5 cm

Oppervlakte $= 6 \times (\frac{1}{2}.5.5.\sin 60°) = 64{,}95\ cm^2$

4.3 Volume van halfsfeer $= \frac{1}{2}(\frac{4}{3}\pi r^3)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\pi(2)^3\right)$

$= 16{,}76\ cm^3$

Volume van silinder $= \pi r^2 h$

$= \pi(2)^2.10$

$= 125{,}66\ cm^3$

Totale volume = 16,76 + 125,66 = 142,42 cm^3

VRAAG 5

5.1.1 Meer 1:

Min = 12 000 000

Q_1 = 16 000 000

Mediaan = 20 000 000

Q_3 = 22 000 000

Maks = 34 000 000

Meer 2:

Min = 0

Q_1 = 22 000 000

Mediaan = 28 000 000

Q_3 = 30 000 000

Maks = 36 000 000

5.1.2 Meer 2

5.1.3 Meer 1: 6 000 000

Meer 2: 8 000 000

5.1.4 Meer 1 is positief skeef en meer 2 negatief skeef.

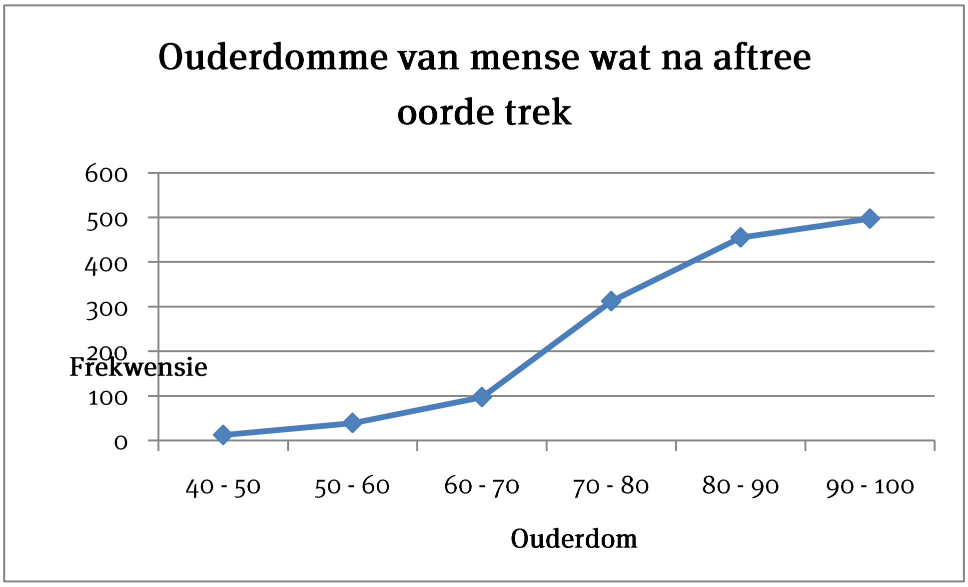
5.1.5 Die populasie in meer 1 is meer konstant.

5.2.1 497 het vrae beantwoord

5.2.2

Ouderdom	Frekwensie	Kumulatiewe frekwensie
$40 \leq x < 50$	12	12
$50 \leq x < 60$	27	39
$60 \leq x < 70$	58	97
$70 \leq x < 80$	215	312
$80 \leq x < 90$	143	455
$90 \leq x < 100$	42	497

5.2.3



5.2.4 Die median interval is $70 \leq x < 80$.

VRAAG 6

6.1.1 Geniddeld $= \frac{2{,}12+2{,}05+2{,}63+1{,}80+1{,}85+2{,}35+2{,}44+2{,}01+3{,}02+1{,}78+1{,}95+1{,}98+2{,}09+2{,}35+1{,}82+2{,}35+1{,}99+1{,}92+2{,}35}{19}$

$= 2{,}15\ m$

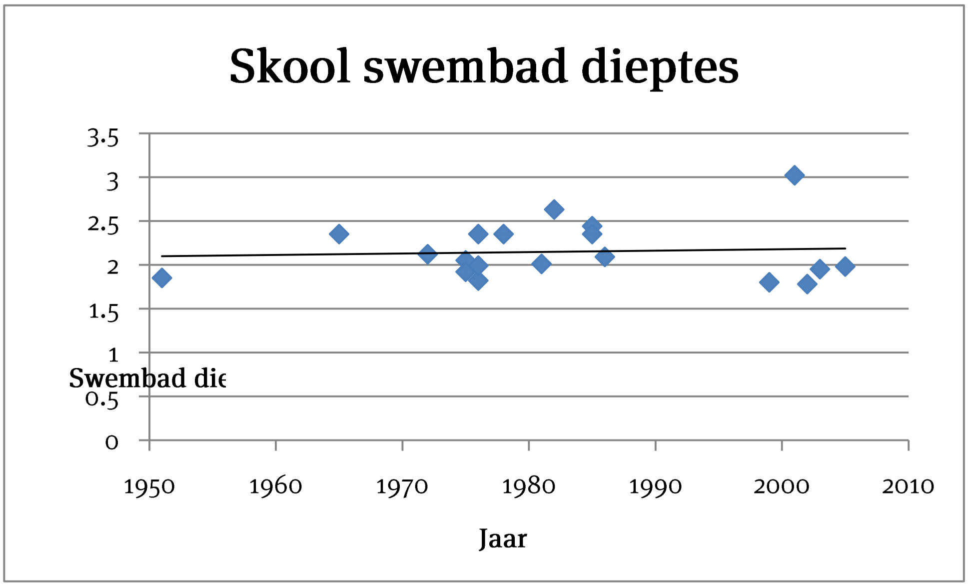
Mediaan = 2,05 m

Modus = 2,35 m

6.1.2 0,31 m

6.1.3 18 swembaddens

6.2.1



6.2.2 2,1 m

6.2.3 Om-en-by 1998.

VRAAG 7

7.1 1

7.2 $RK = \tan x\,(\cos^3 x + \cos x \sin^2 x)$

$= \frac{\sin x}{\cos x}[\cos x(\cos^2 x + \sin^2 x)]$

$= \sin x(1) = \sin x = LK$

7.3 Die oplossings sal in die 3^{de} en 4^{de} kwadrante wees. Die verwysingshoek is $\sin^{-1}$ -0,876 = -61,16°.

Nou moet ons die algemene oplossing uitwerk:

$3x = 180° - 61{,}16° + k.360°$ of $3x = 360° - 61{,}16° + k.360°, k \in R$

$3x = 118{,}83° + k.360°$ $= 298{,}84° + k.360°$

$x = 39{,}61° + k.120°$ $= 99{,}61° + k.120°$

Woordelys

afhanklik	is afhanklik van die waarde van iets anders
afleiding	‘n afleiding is ‘n nuwe voorstel wat uit ‘n teorie voortvloei
aksioom	‘n aksioom is ‘n Wiskundige stelling wat waar is
dieptehoek	‘n dieptehoek is die hoek tussen ‘n horisontale lyn en die lyn vanaf ‘n waarnemer tot by ‘n voorwerp onder die horisontale lyn
frekwensie	‘n lyngrafiek wat gebruik word om gegroepeerde data voor te stel
gekwoteerde rente	gekwoteerde rente word per jaar gekwoteer, maar word meer gereeld saamgestel
grade	‘n eenheid waarin hoeke gemeet word; daar is 360 grade in ‘n sirkel
gradiënt	‘n gradiënt is ‘n helling
histogram	‘n histogram bestaan uit reghoeke met oppervlaktes gelyk aan die frekwensie van die veranderlike; die wydte van elke reghoek is gelyk aan die klasinterval
hoek	die spasie tussen twee lyne wat mekaar sny; gewoonlik in grade gemeet
hoogtehoek	die hoogtehoek is die hoek tussen ‘n horisontale lyn en die lyn vanaf die waarnemer tot by ‘n voorwerp bokant die horisontale lyn
inklinasie	die inklinasie van ‘n reguit lyn is die hoek wat die lyn vorm teen die positiewe x-as
klaspunt	die middelpunt van elke klasinterval
kolineêr	as drie punte kolineêr is, val hulle op dieselfde reguit lyn
komplementêre stelle	die komplement van A bestaan uit al die waardes wat nie in A is nie; die komplement van A word die komplementêre stel genoem
konvensionele peiling	spesifiseer ‘n peiling deur ‘n hoek en ‘n kompaspunt as verwysing te gebruik; gewoonlik in grade gemeet
kumulatiewe frekwensie	die kumulatiewe frekwensie is die som van al die frekwensies tot by daardie punt
lineêre vergelyking	vergelyking tussen twee veranderlikes
nominale rente	nominale rente word per jaar gekwoteer, maar word meer gereeld saamgestel
nulproduk-reël	die nulproduk-reël is: “As $a \times b = 0$, dan is $a = 0$ or $b = 0$"
ogief	‘n grafiek wat kumulatiewe frekwensie voorstel
omgrens	‘n vorm wat rondom ‘n ander vorm gaan, omgrens die eerste vorm
onafhanklik	is nie van enigiets anders afhanklik nie
onderling uitsluitend	onderling uitsluitende gebeure kan nie terselfdertyd waar wees nie
proefruimte	die stel van alle moontlike uitkomste
radikaal	die wortel van ‘n hoeveelheid
radikand	die getal onder die wortelteken (die radikaal)
regte prisma	‘n regte prisma is ‘n veelhoek met twee identiese aansigte – die basis genoem
regte silinder	‘n silinder met kante loodreg met die basis
siklies	die vlakke van ‘n sikliese vierhoek lê almal op dieselfde sirkel
standaardafwyking	die maatstaf van hoeveel die hele stel datapunte van die gemiddelde verskil
standaardvorm	die mees algemene vorm van ‘n vergelyking of uitdrukking
tangens	‘n lyn wat ‘n ander kurwe aanraak, maar nie kruis nie

Woordelys

teorie	‘n teorie is ‘n voorstel oor iets, uitgedruk in formules, en wat bewys moet word
uitskieters	‘n uitskieter is ‘n waarde wat ver van die res van die waardes in ‘n datastel lê
variansie	die maatstaf van hoe ver datapunte van die mediaan af is
veelvlak	‘n veelvlak is ‘n geometriese vaste vorm in drie dimensies, met plat aansigte en reguit rande
Venn-diagram	‘n diagram wat sirkels gebruik om stelle data en die verhoudings tussen die stelle data voor te stel
waardevermindering	die vermindering van die waarde van ‘n bate oor tyd
ware peiling	ons meet die ware peiling tussen twee punte in ‘n kloksgewyse rigting en begin by noord
wortels	die wortels van ‘n vergelyking is die oplossings van die vergelyking