M. Malan

Studiegids

Via Afrika Wiskunde

Graad 12

Via Afrika
Publishers
Our Teachers. Our Future.

Inhoud

Inleiding tot Via Afrika Wiskunde Graad 12 Studiegids

Woohoo! Jy het dit gehaal! As jy lees wat hier staan, beteken dit dat jy Graad 11 deurgekom het, en nou in Graad 12 is. Maar hoekom vir jou iets vertel wat jy reeds weet …

Dit beteken ook dat jou onderwyser briljant genoeg was om die *Via Afika Wiskunde Graad 12 Leerderboek* te kies. Hierdie studiegids bevat opsommings van elke hoofstuk, en moet saam met die Leerderboek gebruik word. Dit bevat ook baie ekstra vrae om jou te help om die leermateriaal te bemeester.

Wiskunde – nie vir toeskouers nie

Jy sal niks leer as jy nie aktief betrokke raak by die leermateriaal nie. Doen die wiskunde, voel die wiskunde, en verstaan en gebruik dan die wiskunde.

Verstaan die beginsels

- **Luister in klastyd** Hierdie studiegids is uitstekend, maar dit is nie genoeg nie. Luister na jou onderwyser in die klas omdat jy 'n unieke of maklike manier om iets te doen, kan leer.
- **Bestudeer die notasie, grondig.** Vir die verkeerde gebruik van notasie sal in toetse en eksamens punte afgetrek word. Gee aandag aan notasie in ons uitgewerkte voorbeelde.
- **Oefen, Oefen, Oefen, en Oefen nog eens.** Jy moet soveel moontlik oefen. Hoe meer jy oefen, hoe beter voorbereid en meer selfversekerd sal jy vir die eksamens voel. Hierdie gids bevat baie ekstra oefengeleenthede.
- **Volhard.** Ons kan nie almal Einsteins wees nie, en selfs oom Albert het gesukkel om sommige van die uiters gevorderde wiskunde te leer wat hy nodig gehad het om sy teorieë te formuleer. As jy dit nie dadelik verstaan nie, werk daaraan en oefen met soveel probleme in hierdie studiegids moontlik. Jy sal vind dat onderwerpe wat jou aanvanklik dronkgeslaan het, skielik vir jou verstaanbaar word.
- **Toon die regte ingesteldheid.** Jy kan dit doen!

Die VMI van Wiskunde

VERMOë behels wat jy in staat is om te doen.

MOTIVERING bepaal wat jy doen.

INGESTELDHEID bepaal hoe goed jy dit doen.

"Suiwer Wiskunde is, op sy eie manier, die poësie van logiese idees." Albert Einstein

Oorsig

Hoofstuk 1 Bladsy 8 Getalpatrone, Rye en Reekse	**Eenheid 1 Bladsy 10**	
	Rekenkundige rye en reekse	• Formule vir ’n rekenkundige ry
	Eenheid 2 Bladsy 14	
	Meetkundige rye en reekse	• Formule vir die n^de^ term van ’n ry
	Eenheid 3 Bladsy 18	
	Die som tot n terme (S_n): Sigma-notasie	• Die som tot n terme in ’n rekenkundige ry • Die som tot n terme in ’n meetkundige ry
	Eenheid 4 Bladsy 28	
	Konvergensie en som tot oneindigheid	• Konvergensie

ONTHOU, JOU STUDIEBENADERING MOET WEES:

1. Werk deur al die voorbeelde in hierdie hoofstuk van jou handboek.
2. Werk deur die aantekeninge in hierdie hoofstuk van die studiegids.
3. Doen die oefeninge aan die einde van die hoofstuk in die handboek.
4. Doen die gemengde oefeninge aan die einde van hierdie hoofstuk in die studiegids.

Jy kan net Wiskunde LEER as jy Wiskunde DOEN!

Hoofstuk 1

Getalpatrone, Rye en Reekse

TABEL 1: OPSOMMING VAN RYE EN REEKSE

SOORT	ALGEMENE TERM: T_n	SOM VAN TERME: S_n	VOORBEELDE
Rekenkundige ry (RR) (word ook lineêre ry genoem) Konstante **1ste verskil**	$T_n = a + (n-1)d$ $a = eerste\ term\ T_1$ $d = konstante\ verskil$ $d = T_2 - T_1$ $of\ \ T_3 - T_2$, ens.	$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$ of $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$ waar l = die laaste term van die ry	A) $\underbrace{2 \ ; \ 5}_{} \ ; \underbrace{\ 8}_{} \ ; \underbrace{\ 11}_{} \ ; \ldots$ $d =$ +3 +3 +3 $T_n = 2 + (n-1)(3)$ $= 2 + 3n - 3$ $= 3n - 1$ B) 1 ; -4 ; -9 ; … $d =$ -5 -5 $T_n = 1 + (n-1)(-5)$ $= 1 - 5n + 5$ $= -5n + 6$
Meetkundige ry (MR) (word ook eksponensiaalry genoem) Konstante verhoudin g	$T_n = ar^{n-1}$ $a = eerste\ term\ T_1$ $r = konstante\ verhouding$ $r = \frac{T_2}{T_1}\ \ of\ \ \frac{T_3}{T_2}$	$S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ Of $S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ Of $S_\infty = \frac{1}{1-r}$ Waar $-1 < r < 1$ (konvergerende reekse)	A) 2 ; -4 ; 8 ; -16 ; … $r =$ x-2 x-2 x-2 $T_n = 2(-2)^{n-1}$ KONVERGEER NIE as $r < -1$ nie B) 3 ; $\frac{3}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{3}{8}$; … $r =$ x$\frac{1}{2}$ x$\frac{1}{2}$ x$\frac{1}{2}$ $T_n = 3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ KONVERGEER as $-1 < r < 1$
Kwadratiese ry (KR) Konstante **2de verskil**	$T_n = an^2 + bn + c$ f= 1ste verskil s= 2de verskil Bepaal a, b en c deur gelyktydige vergelykings te gebruik (sien voorbeeld). Alternatiewelik: $a = s \div 2$ $b = f_1 - 3a$ $c = T_1 - a - b$ waar		3 ; 8 ; 16 ; 27 ; … f: 5 8 11 s: 3 3 Stel drie vergelykings op deur die eerste drie terme te gebruik: $T_1 = 3$: $3 = a + b + c$ …(1) $T_2 = 8$: $8 = 4a + 2b + c$ …(2) $T_3 = 16$: $16 = 9a + 3b + c$ …(3)

	f_1 = eerste term van eerste verskil		Gelyktydige oplossing lei tot: $T_n = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n + 1$

SOORT VRAE WAT JY KAN VERWAG	STRATEGIE OM HIERDIE SOORT VRAAG TE BEANTWOORD	VOORBEELD(E) VAN HIERDIE SOORT VRAAG
Identifiseer enige van die volgende drie soorte rye: rekenkundige ry (RR), meetkundige ry (MR) en kwadratiese ry (KR).	Bepaal of ry die volgende het: • konstante 1ste verskil (RR) • konstante verhouding (MR) • konstante 2de verskil (KR)	Sien Tabel 1 hierbo.
Bepaal die formule vir die **algemene term**, T_n, van RR, MR en KR (uit Graad 11).	Jy moet die volgende bepaal: • a en d vir 'n RR • a en r vir 'n MR • a, b en c vir 'n KR.	Sien Tabel 1 hierbo.
Bepaal enige **spesifieke term** vir 'n ry, bv. T_{30}.	Vervang die waarde van n in T_n.	Sien Handboek: Voorbeeld 1, nr. 1 d en 2 d, bl. 8 (RR) Voorbeeld 1, nr. 1 b, 3 b, bl. 11 (RR) Voorbeeld 1, nr. 1, bl. 15 (MR)
Bepaal die **aantal terme** in 'n ry, n, vir 'n RR, MR en KR, of die posisie, n, van 'n spesifieke gegewe term of wanneer die som van die reekse gegee word.	**Vervang** alle bekende veranderlikes in die algemene term om 'n vergelyking met $\boldsymbol{n}$ as die enigste **onbekende** te kry. Los op vir n. OF **Vervang** alle bekende veranderlikes in die S_n-formule om 'n vergelyking met $\boldsymbol{n}$ as die enigste **onbekende** te kry. Los op vir n. Onthou: n moet 'n natuurlike getal wees (nie negatief nie, nie 'n breuk nie)	Sien Handboek: Voorbeeld 1, nr.1 c, bl. 8 Voorbeeld 1, nr.1 c, bl. 11 Voorbeeld 1, nr. 3, bl. 15 Voorbeeld 2, nr. 3, bl. 20 Voorbeeld 3, nr. 2, bl. 24
Wanneer twee stelle inligting gegee word, gebruik jy gelyktydige vergelykings om op te los: $\boldsymbol{a}$ **en** $\boldsymbol{d}$ (vir 'n RR) $\boldsymbol{a}$ **en** $\boldsymbol{r}$ (vir 'n MR).	Vir elke stel inligting wat gegee word, vervang jy die waardes van n en T_n of n en S_n. Jy het dan **2 vergelykings** wat jy **gelyktydig** kan oplos (deur vervanging).	Sien Handboek: Voorbeeld 1, nr. 3, bl. 11 (RR) Voorbeeld 1, nr.2, bl. 15 (RR) Voorbeeld 3, nr.3, bl. 24 (MR)
Bepaal die waarde van 'n veranderlike (x) wanneer 'n ry in terme van x gegee word.	Vir RR gebruik jy 'n konstante verskil: $T_3 - T_2 = T_2 - T_1$	Die eerste drie terme van 'n RR word gegee deur $2x - 4; x - 3; 8 - 2x$

	Vir MR gebruik jy 'n konstante verhouding: $\frac{T_2}{T_1}=\frac{T_3}{T_2}$	Bepaal x: $8-2x-(x-3)=x-3-(2x-4)$ $\therefore x=5$
Vir 'n reeks gegee in sigma-notasie: • Bepaal die **aantal terme**.	Onthou: Die **"teller"** dui die aantal terme in die reeks aan.	$\sum_{k=1}^{n} T_k$ het n terme (teller k loop van 1 tot n) $\sum_{k=0}^{n} T_k$ het $(n+1)$ terme (teller loop van 0 tot n; dus een term ekstra) $\sum_{k=5}^{n} T_k$ het $(n-4)$ terme (vier terme nie getel nie)
• Bepaal die **waarde** van die reeks, met ander woorde, S_n.	Onthou, die uitdrukking langs die ∑-teken is die algemene term, T_n. Dit sal jou help om a en d of r te bepaal.	Sien Handboek: Voorbeeld 1, bl. 19
Skryf 'n gegewe reeks in **sigma-notasie.**	Bepaal die algemene term, T_k en aantal terme, n en vervang in $\sum_{k=1}^{n} T_k$.	Voorbeeld 1, bl. 19
Bepaal die **som**, $\boldsymbol{S_n}$, van 'n RR en 'n MR (wanneer die aantal terme gegee word of nie gegee word nie).	In sommige gevalle moet jy **eers** T_n gebruik om die **aantal terme**, n, te bepaal. Vervang die waarde van a, n en d/r in die formule vir S_n.	Sien Handboek: Voorbeeld 2, nr. 1 & 2, bl. 20 Voorbeeld 3, nr. 1, bl. 24
Bepaal of 'n MR konvergeer of nie.	Konvergeer as $-1<r<1$	
Bepaal S_∞ vir 'n konvergerende MR.	Vervang die waarde van a en r in die formule vir S_∞.	Sien Handboek: Voorbeeld 1, nr. 1, bl. 29
Bepaal die waarde van 'n veranderlike (x) waarvoor 'n reeks sal konvergeer, bv. $(2x+1)+(2x+1)^2+\ldots$	Bepaal r in terme van x en gebruik $-1<r<1$.	Sien Handboek: Voorbeeld 1, nr. 3, bl. 29
Pas jou kennis van rye en reekse op 'n toegepaste voorbeeld toe (wat dikwels diagram(me) behels).	Skep 'n ry terme uit die gegewe inligting. Identifiseer die soort ry.	Sien Handboek: Oefening 5, nr. 6, bl. 30

Gemengde oefening oor Rye en Reekse

1 Bestudeer die volgende ry: 5; 9; 13; 17; 21; …

a Bepaal die algemene term.

b Watter term is gelyk aan 217?

2 a T_5 van 'n meetkundige ry is 9 en T_9 is 729. Bepaal die konstante verhouding.

b Bepaal T_{10}.

3 Die volgende is 'n rekenkundige ry: $2x-4\ ;\ 5x\ ;\ 7x-4$

a Bepaal die waarde van x.

b Bepaal die eerste 3 terme.

4 Bestudeer die volgende ry: 2 ; 7 ; 15 ; 26 ; 40 ; ...

a Bepaal die algemene term.

b Watter term is gelyk aan 260?

5 Hoeveel terme is daar in die volgende ry?

17 ; 14 ; 11 ; 8 ; ... ; -2785

6 Tom verbind balle met stawe in rangskikkings soos hieronder getoon:

Rangskikking 1 Rangskikking 2 Rangskikking 3 Rangskikking 4

1 bal, 4 stawe 4 balle, 12 stawe 9 balle, 24 stawe 16 balle, 40 stawe

a Bepaal die aantal balle in die n^{de} rangskikking.

b Bepaal die aantal stawe in die n^{de} rangskikking.

7 Bepaal die volgende:

a $\sum_{k=1}^{30}(8-5k)$ b $\sum_{k=2}^{10}\frac{1}{4}(2)^{k-1}$

8 Skryf die volgende in sigma-notasie: 1+5+9+...+21

9 Die 5^{de} term van 'n rekenkundige ry is nul en die 13^{de} term is gelyk aan 12.

Bepaal:

a die konstante verskil en die eerste term

b die som van die eerste 21 terme.

10 Die eerste twee terme van 'n meetkundige ry is: $(x+3)$ en (x^2-9).

a Vir watter waarde van x is dit 'n konvergerende ry?

b Bereken die waarde van x as die som van die reeks tot oneindigheid 13 is.

11 Bereken die waarde van: $\frac{99+97+95+\cdots+1}{299+297+295+\cdots+201}$

12 $S_n = 3n^2-2n$. Bepaal T_9.

13 Die eerste vier terme van 'n meetkundige ry is $7; x; y; 189$.

a Bepaal die waardes van x en y.

b As die konstante verhouding 3 is, maak gebruik van 'n gepaste formule om die aantal terme in die ry te bepaal wat 'n som van 206 668 sal gee.

Funksies

Oorsig

Hoofstuk 2 Bladsy 36 Funksies	**Eenheid 1 Bladsy 40**	
	Die definisie van 'n funksie	• Relasies en funksies • Soorte relasies • Watter relasies is funksies? • Definisie van 'n funksie • Funksienotasie
	Eenheid 2 Bladsy 44	
	Die inverse van 'n funksie	• Die begrip inverses deur stelle geordende getallepare te bestudeer
	Eenheid 3 Bladsy 46	
	Die inverse van $y = ax + q$	• Grafieke van f en f^{-1} op dieselfde assestelsel
	Eenheid 4 Bladsy 48	
	Die inverse van die kwadratiese funksie $y = ax^2$	• Beperking van die definisieversameling van die parabool

ONTHOU, JOU STUDIEBENADERING MOET WEES:

1. Werk deur al die voorbeelde in hierdie hoofstuk van jou handboek.
2. Werk deur die aantekeninge in hierdie hoofstuk van die studiegids.
3. Doen die oefeninge aan die einde van die hoofstuk in die handboek.
4. Doen die gemengde oefeninge aan die einde van hierdie hoofstuk in die studiegids.

Jy kan net Wiskunde LEER as jy Wiskunde DOEN!

SOORTE RELASIES TUSSEN TWEE VERANDERLIKES			
SOORT	BESKRYWING	EIENSKAPPE	TIPIESE VOORBEELDE
NIE-FUNKSIES	Een-tot-baie	• Een x-waarde in die definisieversameling het MEER AS EEN y-waarde • Slaag NIE die vertikale lyn-toets NIE	• Inverse van 'n parabool (Sien Eenheid 4)
FUNKSIES	Een-tot-een	• Elke x-waarde het 'n unieke y-waarde • Geen x- of y-waarde verskyn meer as een keer in die definisieversameling of waardeversameling nie • Slaag die vertikale lyn-toets	• Reguitlyngrafiek en sy inverse • Hiperbool en sy inverse • Eksponensiaal-grafiek en sy inverse, die logaritmiese funksie
	Baie-tot-een	• Geen x-waarde verskyn meer as een keer in die definisieversameling nie • Meer as een x-waarde beeld op dieselfde y-waarde af • Slaag die vertikale lyn-toets	• Parabool • Grafiek van die kubieke funksie • Trigonometriese grafieke

HERSIENING VAN DIE REGUITLYNGRAFIEK

Standaardvorm: $\boldsymbol{y = mx + c}$

$\boldsymbol{m}$

- Gradiënt van lyn
- Dui "steilheid" en rigting van lyn aan:

$m > 0\ (+)$ ↗

$m < 0 (-)$ ↘

$m = 0$ ↔

- $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\boldsymbol{c}$

- y-afsnit
- Waar $x = 0$

EWEWYDIGE LYNE EN LOODLYNE

Laat $y = m_1x + c_1$ en $y = m_2x + c_2$ twee lyne wees.

As die lyne **EWEWYDIG** is, dan is:

$m_1 = m_2$.

As die lyne **LOODLYNE** is, dan is:

$m_1 \times m_2 = -1$.

HOE OM DIE VERGELYKING VAN 'N REGUITLYN TE BEPAAL	
GEGEE	**VOORBEELDE**
1. Gradiënt en 'n punt	'n Lyn het 'n gradiënt van $\frac{1}{2}$ en gaan deur die punt (4;1): $m = \frac{1}{2}$ Vervang punt (4;1) in $y = \frac{1}{2}x + c$ $1 = \frac{1}{2}(4) + c$ $c = -1$ $y = \frac{1}{2}x - 1$
2. y-afsnit en 'n punt	'n Lyn het 'n y-afsnit 3 en gaan deur die punt (-2;1): $c = 3$ Vervang punt (-2;1) in $y = mx + 3$ $1 = m(-2) + 3$ $m = 1$ $y = x + 3$
3. Twee punte op die lyn	'n Lyn gaan deur die punte (4;-3) en (2;1). $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1-(-3)}{4-(2)} = 2$ Vervang enige een van die twee punte in $y = 2x + c$ 1=2(2)+c $c = -3$ $y = 2x - 3$
4. 'n Punt of y-afsnit plus inligting oor verwantskap met 'n ander lyn	a) 'n Lyn is ewewydig aan die lyn $y = -x + 3$ en gaan deur die punt (5;-2). **Ewewydige lyne** het dieselfde **gradiënt**; dus $m = -1$ Vervang (5;-2) in $y = -x + c$ $-2 = -(5) + c$ $c = 3$ b) 'n Lyn is loodreg op die lyn $y = 2x - 1$ en het 'n y-afsnit van 4. **Loodlyne** het 'n gradiënt met 'n **produk van** -1. $m \times 2 = -1 \quad \therefore m = -\frac{1}{2}$ $y = \frac{-1}{2}x + 4$

HERSIENING VAN DIE PARABOOL

VERGELYKING IN STANDAARDVORM

$$y = ax^2 + bx + c \qquad (a \neq 0)$$

a

Dui vorm van parabool aan

$a > 0\ (+)$

Konkaaf op

☺

Onthou:

Positief (+) 'n mens glimlag!

$a < 0(-)$

Konkaaf af

☹

Onthou:

Negatief (–) 'n mens is hartseer!

c

- y-afsnit
- Waar $x = 0$

b

- Affekteer die simmetrie-as en draaipunt (DP)
- Vergelyking van simmetrie-as: $x = -\frac{b}{2a}$
- Koördinate van DP $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$

x-afsnitte

- Word ook wortels/nulle genoem

VERGELYKING IN DRAAIPUNTVORM

$$y = a(x - p)^2 + q \quad (a \neq 0)$$

a

Dui vorm van parabool aan

$a > 0\ (+)$

Konkaaf op

☺

Onthou:
Positief (+) 'n mens glimlag!

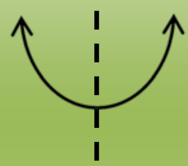
$a < 0(-)$

Konkaaf af

☹

Onthou:
Negatief (–) 'n mens is

p en q



- Vergelyking van simmetrie-as $x = p$
- Koördinate van draaipunt $(p; q)$

Afsnitte

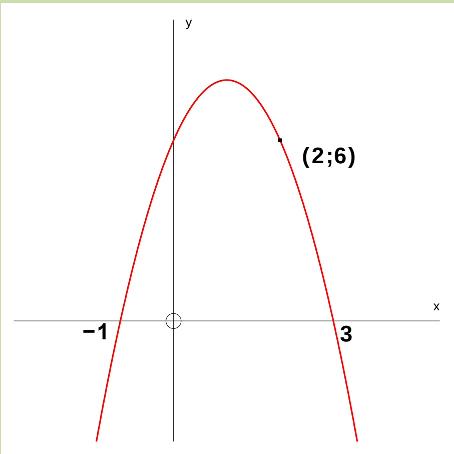
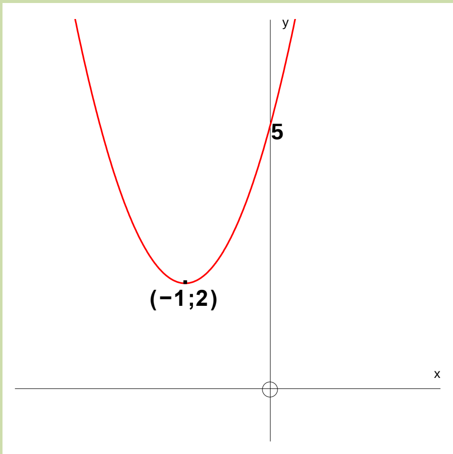
- x-afsnitte (maak $y = 0$)
- y-afsnit (maak $x = 0$)

DEFINISIEVERSAMELING: $x \in R$

WAARDEVERSAMELING:

$y \in (-\infty; q)$

$y \in (q; \infty)$

BEPAAL DIE VERGELYKING VAN 'N PARABOOL	
GEGEE: 2 WORTELS (x-AFSNITTE) PLUS 1 PUNT	GEGEE: DRAAIPUNT PLUS 1 PUNT
VORM VAN VERGELYKING: $\boldsymbol{y = a(x - x_1)(x - x_2)}$ $\boldsymbol{x_1}$ en $\boldsymbol{x_2}$ is die wortels	VORM VAN VERGELYKING: $y = a(x - p)^2 + q$ $(p; q)$ is die draaipunt van die parabool
VOORBEELD:  $\boldsymbol{x_1 = -1} \qquad \boldsymbol{x_2 = 3}$ $\boldsymbol{y = a(x - x_1)(x - x_2)}$ $\boldsymbol{y = a(x - (-1))(x - 3)}$ $\boldsymbol{y = a(x + 1)(x - 3)}$ Vervang nou die ander punt $\boldsymbol{(2; 6)}$: $\boldsymbol{6 = a(2 + 1)(2 - 3)}$ $\boldsymbol{6 = a(3)(-1)}$ $\boldsymbol{6 = -3a}$ $\boldsymbol{-2 = a}$ $\boldsymbol{y = -2(x + 1)(x - 3)}$ $\boldsymbol{y = -2(x^2 - 2x - 3)}$ $\boldsymbol{y = -2x^2 + 4x + 6}$ (standaardvorm)	VOORBEELD:  $(p; q) = (-1; 2)$ $y = a(x - p)^2 + q$ $y = a(x - (-1))^2 + 2$ $y = a(x + 1)^2 + 2$ Vervang nou die punt (0;5): $5 = a(0 + 1)^2 + 2$ $5 = a + 2$ $3 = a$ $y = 3(x + 1)^2 + 2$ $y = 3(x^2 + 2x + 1) + 2$ $y = 3x^2 + 6x + 3 + 2$ $y = 3x^2 + 6x + 5$ (standaardvorm)

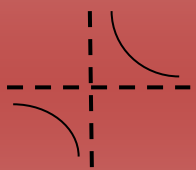
HERSIENING VAN DIE HIPERBOOL

$$y = \frac{a}{x-p} + q$$

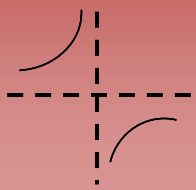
a

Dui vorm van hiperbool aan (na aanleiding van asimptote)

$a > 0\ (+)$



$a < 0 (-)$



p

Vertikale asimptoot

$x = p$

q

Horisontale asimptoot

$y = q$

Afsnitte

- x-afsnit (maak $y = 0$)
- y-afsnit (maak $x = 0$)

Definisieversameling:

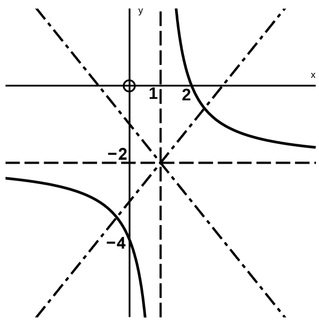
$x \in R; x \neq p$

Waardeversameling:

Simmetrie-asse (SA)

- Twee simmetrie-asse
- SA gaan deur die afsnit van die asimptote $(p; q)$
- Vergelykings: $y = x + k_1$ en $y = -x + k_2$
- Vervang die punt $(p; q)$ om k_1 en k_2 te bereken

VOORBEELD: $y = \frac{2}{x-1} - 2$	
y-afsnit: $y = \frac{2}{-1} - 2 = -4$ x- afsnit: $0 = \frac{2}{x-1} - 2\ ; x = 2$ Asimptote: $x = 1\ en\ y = -2$	Simmetrie-asse: Vervang $(1; -2)$ in $y = x + k_1\ \ en\ y = -x + k_2$ $-2 = 1 + k_1\ \ en\ \ -2 = -1 + k_2$ $k_1 = -3\ \ en\ k_2 = -1$ $y = x - 3\ \ en\ \ y = -x - 1$



HERSIENING VAN DIE EKSPONENSIAALGRAFIEK

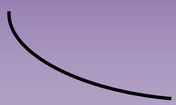
$$y = a^{x-p} + q$$

a

Dui vorm van hiperbool aan

$a > 1$

$0 < a < 1$



q

- Horisontale asimptoot: $y = p$
- Dui aan dat die grafiek $y = a^x$ **vertikaal** boontoe/ondertoe getransleer is (geskuif het)

$q > 0$: het boontoe geskuif

p

Dui aan dat die grafiek $y = a^x$ **horisontaal** na links/regs getransleer is (geskuif het)

$p > 0$: het na links geskuif

$p < 0$: het na regs geskuif

Afsnitte

- x-afsnit (maak $y = 0$)
- y-afsnit (maak $x = 0$)

Definisieversameling: $x \in R$

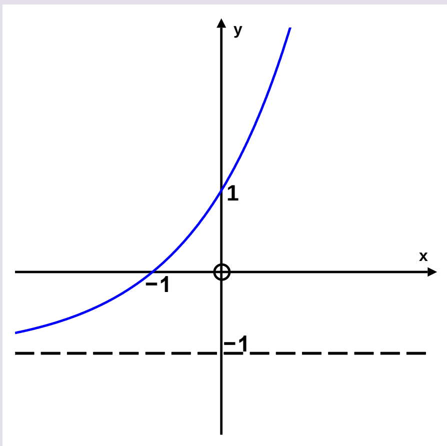
Waardeversameling: $y \in (q; \infty)$

VOORBEELD: $y = 2^{x+1} - 1$

Asimptoot: $y = -1$

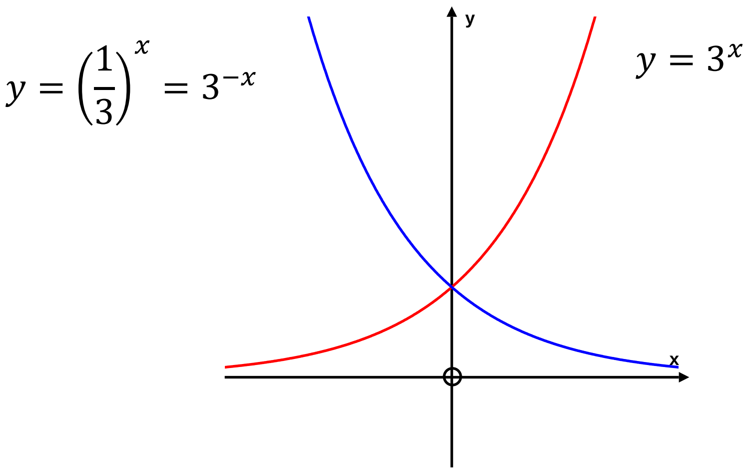
x-afsnit ($y = 0$): $2^{x+1} - 1 = 0$ $\quad \therefore x = -1$

y-afsnit: ($x = 0$): $y = 2^{0+1} - 1 = 1$

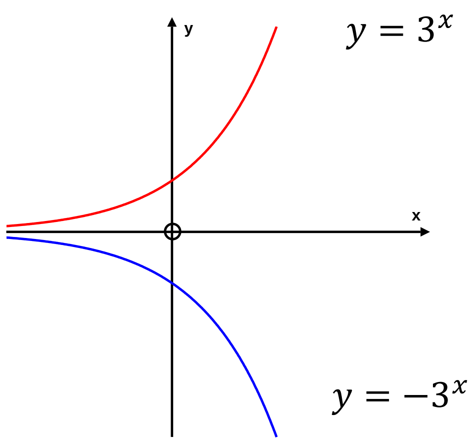


VOORBEELDE VAN SIMMETRIESE EKSPONENSIAALGRAFIEKE

SIMMETRIES IN DIE y-AS



SIMMETRIES IN DIE x-AS



SNYDING VAN TWEE GRAFIEKE

Gebruik **GELYKTYDIGE VERGELYKINGS** om die koördinate van die **SNYPUNT** van twee grafieke te bepaal.

VOORBEELD

Bepaal die koördinate van die snypunte van
$f(x) = 3x + 6$ en
$g(x) = -2x^2 + 3x + 14$

Stel die twee vergelykings gelyk en los op vir x:

$$3x + 6 = -2x^2 + 3x + 14$$
$$2x^2 - 8 = 0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$(x - 2)(x + 2) = 0$$
$$x = 2 \text{ of } x = -2$$

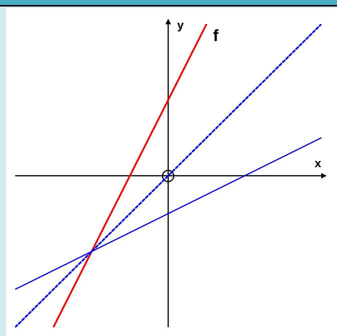
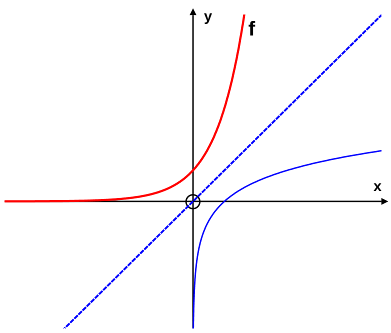
Vervang x-waardes terug in een van die vergelykings (kies die maklikste een).

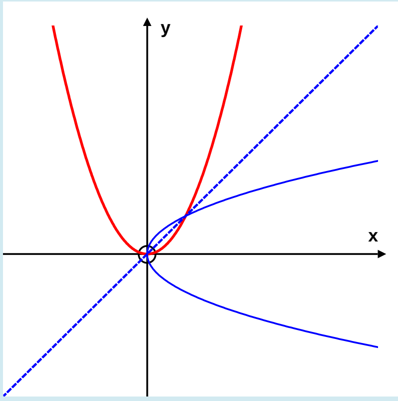
As $x = 2$, dan $y = 3(2) + 6 = 12$
Dus is een snypunt $(2; 12)$.

As $x = -2$, dan $y = 3(-2) + 6 = 0$
Die ander snypunt is $(-2; 0)$, wat ook die x-afsnit van albei grafieke is.

DIE INVERSE VAN 'N FUNKSIE

- Die inverse van 'n funksie, f, word aangedui deur f^{-1}.
- f^{-1} is 'n refleksie van f in die lyn $y = x$.
- Om die vergelyking van f^{-1} te bepaal, ruil jy x en y in die vergelyking van f om.
- Die x-afsnit van f is die y-afsnit van f^{-1}.
- Die y-afsnit van f is die x-afsnit van f^{-1}.

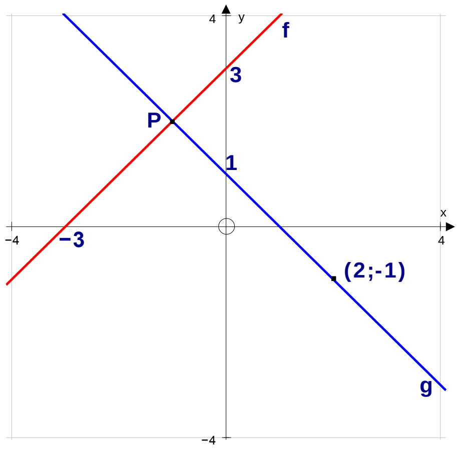
FUNKSIE f	INVERSE VAN FUNKSIE, f^{-1}	VOORBEELDE	DIAGRAM
Reguitlyn $\boldsymbol{f: y = mx + c}$	Reguitlyn	$f: y = 2x + 3$ Inverse: $2y + 3 = x$ $f^{-1}: y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$	
Eksponensiaal-grafiek $\boldsymbol{f: y = a^x}$	Logaritmiese funksie $f^{-1}: y = \log_a x$	$f: y = 3^x$ Inverse: $f^{-1}: y = \log_3 x$	

Parabool $\boldsymbol{f: y = ax^2}$	Die inverse van 'n parabool is **NIE 'N FUNKSIE NIE**. NB: Die DEFINISIE-VERSAMELING van die parabool moet tot $x \geq 0$ of $x \leq 0$ **BEPERK** word sodat f^{-1} ook 'n funksie is.	$f: y = 2x^2$ Inverse: $x = 2y^2$ $y^2 = \frac{1}{2}x$ $f^{-1}: \pm\sqrt{\frac{1}{2}x}$	

Gemengde oefening oor Funksies

1 Bepaal die koördinate van die afsnit van die volgende twee lyne:

$$2x - 3y = 17$$
$$3x - y = 15$$



2 a Bepaal die vergelyking van lyn f.

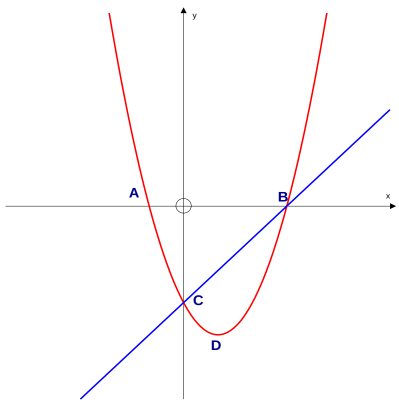
b Bepaal die vergelyking van lyn g.

c Bepaal die koördinate van punt P, waar die twee lyne sny.

d Is hierdie twee lyne loodlyne? Gee 'n rede vir jou antwoord.

e Gee die vergelyking van die lyn wat ewewydig aan lyn g is met 'n y-afsnit van -2.

3 Die diagram toon die grafieke van $y = x^2 - 2x - 3$ en $y = mx + c$.



a Bepaal die lengte van OA, OB en OC.

b Bepaal die koördinate van die draaipunt D.

c Bepaal m en c van die reguitlyn.

d Gebruik die grafiek om te bepaal vir watter waardes van k die vergelyking $x^2 - 2x + k = 0$ net een reële wortel sal hê.

4 Die diagram toon die grafiek van $f(x) = -2(x+1)^2 + 8$.

C is die draaipunt.

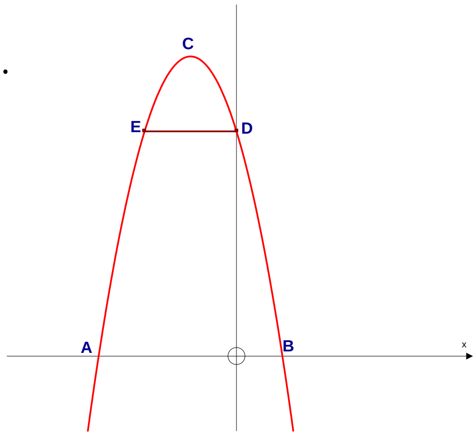
E is die spieëlbeeld van die y-afsnit van f.

Bepaal:

a die lengte van AB.

b die koördinate van C.

c die lengte van DE.



5 Bestudeer die funksie $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x - 2$.

a Maak 'n tekening van g. Dui die asimptoot en afsnitte met die asse duidelik aan.

b Bepaal die definisieversameling van g.

c Vir watter waardes van x sal $g(x) \geq 0$ wees?

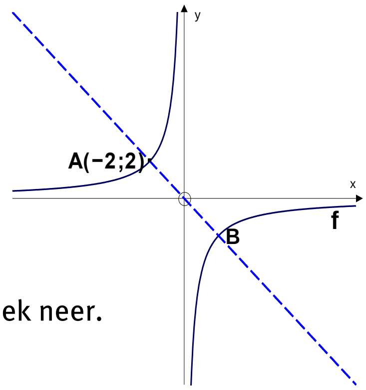
6 Die grafiek van $f(x) = \frac{a}{x}$; $x \neq 0$ verskyn regs.

$A(-2;2)$ is 'n punt op die grafiek waar dit die lyn $y = -x$ sny.

a Bepaal die waarde van a.

b Skryf die koördinate van B neer.

c Grafiek f word 2 eenhede boontoe en 1 eenheid na regs getransleer. Skryf die vergelyking van die nuwe grafiek neer.



7 Die grafieke van die volgende verskyn regs:

$f(x) = -x^2 - 2x + 8$ en $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$

Bepaal:

a die koördinate van A

b die koördinate van B en C

c die lengte van CD

d die lengte van DE wat ewewydig aan die y-as is

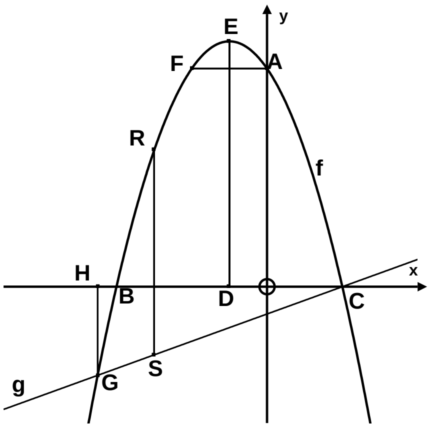
e die lengte van AF wat ewewydig aan die x-as is

f die lengte van GH wat ewewydig aan die y-as is

g die x-waarde waarvoor RS 'n maksimum lengte sal hê

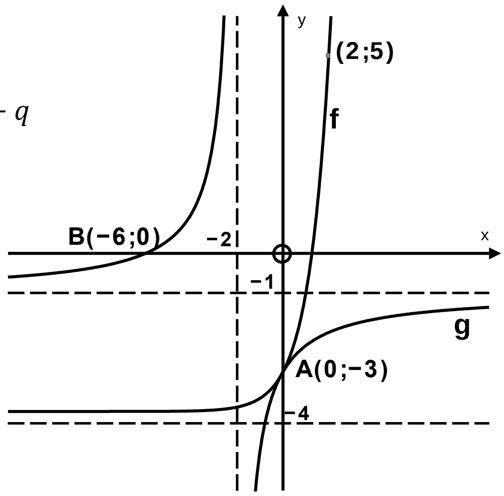
h die maksimum lengte van RS

i die x-waardes waarvoor $f(x) - g(x) > 0$.



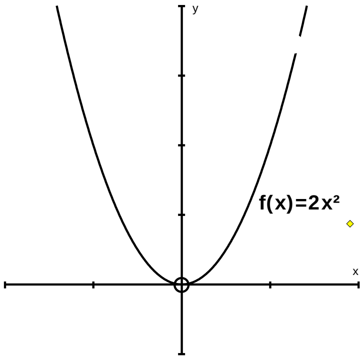
8 Die diagram regs toon die grafieke van die funksies van

$$f(x) = b^x + c \quad and \quad g(x) = \frac{a}{x+p} + q$$



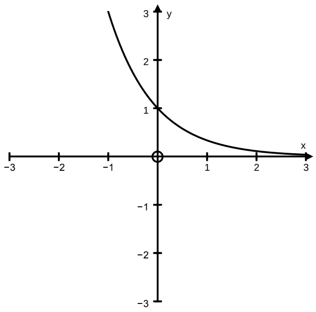
a Skryf die vergelyking van die asimptoot van f neer.
b Bepaal die vergelyking van f.
c Skryf die vergelykings van die asimptote van g neer.
d Bepaal die vergelyking van g.
e Gee die vergelykings van die simmetrie-asse van g.
f Vir watter waardes van x is $f(x) > g(x)$?

9 Die grafiek van $f(x) = 2x^2$ word gegee.



a Bepaal die vergelyking van f^{-1} in die vorm $f^{-1}: y = \cdots$
b Hoe kan 'n mens die definisieversameling van f beperk sodat f^{-1} 'n funksie sal wees?

10 Die grafiek van $f(x) = a^x$ word gegee.
Die punt A (-1; 3) lê op die grafiek.



a Bepaal die vergelyking van f.
b Bepaal die vergelyking van f^{-1} in die vorm $f^{-1}: y = \cdots$
c Maak 'n netjiesetekening van die grafiek van f^{-1}.
d Bepaal die definisieversameling van f^{-1}.

11 'n Reguitlyngrafiek het 'n x-afsnit van -2 en 'n y-afsnit van 3. Skryf die koördinate van die x- en y-afsnit van f^{-1} neer.

Oorsig

Hoofstuk 3 Bladsy 58 Logaritmes	**Eenheid 1 Bladsy 60**	
	Die definisie van 'n logaritme	• Verandering van eksponente na die logaritmiese vorm • Bewyse van die logaritmewette
	Eenheid 2 Bladsy 64	
	Los op vir x: $b^x = a^m$, waar $b \neq a$	• Die gebruik van logaritmes
	Eenheid 3 Bladsy 66	
	Die grafiek van $y = b^x$, waar $b > 1$ en $0 < b < 1$	• Inverse van $y = f(x) = 2^x$ • Inverse van die funksie $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

ONTHOU, JOU STUDIEBENADERING MOET WEES:

1. Werk deur al die voorbeelde in hierdie hoofstuk van jou handboek.
2. Werk deur die aantekeninge in hierdie hoofstuk van die studiegids.
3. Doen die oefeninge aan die einde van die hoofstuk in die handboek.
4. Doen die gemengde oefeninge aan die einde van hierdie hoofstuk in die studiegids.

Jy kan net Wiskunde LEER as jy Wiskunde DOEN!

Definisie van logaritme

As $\log_b x = y$, dan $b^y = x$.

VOORBEELDE: Herleiding van een vorm na 'n ander	
Logaritmiese vorm	Eksponensiaalvorm
$\log_3 243 = 5$	$3^5 = 243$
$\log_{0,5} 0,125 = 3$	$0,5^3 = 0,125$
$\log_{10} 1000 = 3$	$10^3 = 1000$
$\log_3 \sqrt{3} = \frac{1}{2}$	$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

LOGARITMEWET	VOORBEELDE
Wet 1: $\log_m A.B = \log_m A + \log_m B$	• $\log_k abc = \log_k a + \log_k b + \log_k c$ • $\log_5 25.5 = \log_5 25 + \log_5 5 = 2 + 1 = 3$
Wet 2: $\log_m \frac{A}{B} = \log_m A - \log_m B$	• $\log_m \frac{y}{z} = \log_m y - \log_m z$ • $\log_5 \frac{0,2}{25} = \log_5 0,2 - \log_5 25 = \log_5 5^{-1} - \log_5 25 = -1 - 2 = -3$
Wet 3: $\log_x P^y = y \log_x P$	• $\log_y a^3 = 3 \log_y a$ • $\log_5 0,04 = \log_5 5^{-2} = -2 \log_5 5 = -2$
Wet 4: $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$	• $\log_b a = \frac{\log a}{\log b}$ • $\log_2 5 = \frac{\log 5}{\log 2} = 2,32$

Let Wel:

- $\log_a a = 1 \ (a \neq 0)$
- $\log_a 1 = 0$
- $\log a = \log_{10} a$

DIE GEBRUIK VAN LOGARITMES OM VERGELYKINGS OP TE LOS

Ons weet vergelykings met eksponente kan met behulp van eksponentwette opgelos word:

$$2^x = 128$$
$$2^x = 2^7 \text{(priem faktoriseer)}$$
$$\therefore x = 7$$

Maar, wat as ons nie priem faktore kan gebruik nie?

$$2^x = 13$$
$$\log 2^x = \log 13$$
$$x \log 2 = \log 13$$

Hoofstuk 3
Logaritmes

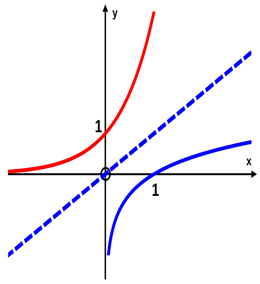
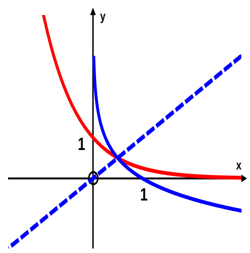
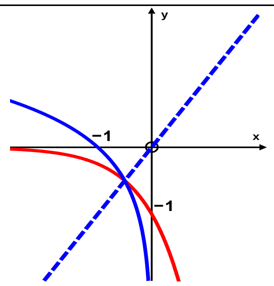
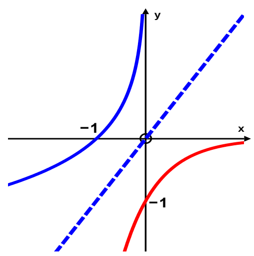
DIE INVERSE VAN DIE EKSPONENSIAALGRAFIEK

Die inverse van die eksponensiaalgrafiek

$f: y = a^x$

is die logaritmiese funksie

$f^{-1}: y = \log_a x\,; x > 0.$

VOORBEELDE		
f(**ROOI** GRAFIEK)	f^{-1}(**BLOU** GRAFIEK)	DIAGRAM
$\boldsymbol{y = 4^x}$	$\boldsymbol{y = \log_4 x}$	
$\boldsymbol{y = \frac{1}{4}^x}$	$\boldsymbol{y = \log_{\frac{1}{4}} x}$	
$\boldsymbol{y = -4^x}$	$\boldsymbol{y = \log_4(-x)}$	
$\boldsymbol{y = -\frac{1}{4}^x}$	$\boldsymbol{y = \log_{\frac{1}{4}}(-x)}$	

Gemengde oefening oor Logaritmes

1 Maak gebruik van die definisie van die logaritme om vir x op te los:

a $\log_3 x = 2$

b $\log_{\frac{1}{3}} x = 2$

c $-\log_4 x = 2$

d $\log_5 x = -2$

e $\log\ x^3 = 6$

f $\log_3 81 = x$

g $\log_3 \frac{1}{9} = x$

2 Die grafiek van $f(x) = a^x$ gaan deur die punt $\left(2; \frac{9}{4}\right)$.

a Bepaal die waarde van a.

b Bepaal die vergelyking van f^{-1}.

c Bepaal die vergelyking van g as f en g simmetries in die y-as is.

d Bepaal die vergelyking van h, die refleksie van f^{-1} in die x-as.

3 Die funksie f word deur die grafiek $f(x) = \log_2 x$ gegee.

a Bepaal die vergelykings van die volgende grafieke:

i g, die refleksie van f in die x-as

ii p, die refleksie van f in die y-as

iii q, die refleksie van g in die y-as

iv f^{-1}, die inverse van f

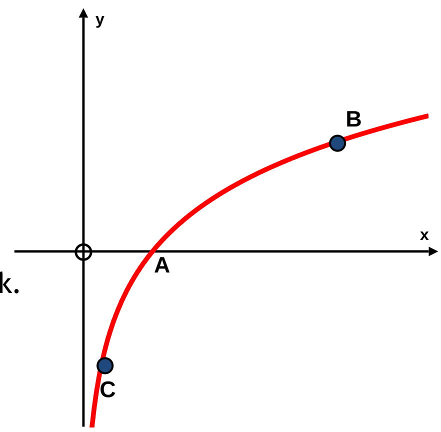
v g^{-1}, die inverse van g

vi h, die translasie van f twee eenhede na links.

b Skets die grafieke van f, f^{-1}, g en g^{-1} op dieselfde assestelsel.

c Bepaal die definisieversameling en waardeversameling van f^{-1} en g^{-1}.

4 Die grafiek van $y = \log_b x$ verskyn regs.



a Bepaal die koördinate van punt A.

b Hoe weet ons dat $b > 1$?

c Bepaal b as B die punt $\left(8; \frac{3}{2}\right)$ is.

d Bepaal die vergelyking van g, die inverse van die grafiek.

e Bepaal die waarde van a as C die punt $(a; -2)$ is.

Finansies, Groei en Verval

Oorsig

Hoofstuk 4 Bladsy 76 Finansies, Groei en Verval	Eenheid 1 Bladsy 78	
	Toekomstige waarde-annuïteite	• Lei die toekomstige waarde-formule af
	Eenheid 2 Bladsy 82	
	Huidige waarde-annuïteite	• Afleiding van die huidige waarde-formule
	Eenheid 3 Bladsy 86	
	Berekening van die tydperk	• Bepaal die waarde van n
	Eenheid 4 Bladsy 88	
	Ontleding van beleggings en lenings	• Uitstaande balanse op 'n lening • Delgingsfonds • Piramideskemas

ONTHOU, JOU STUDIEBENADERING MOET WEES:

1 Werk deur al die voorbeelde in hierdie hoofstuk van jou handboek.

2 Werk deur die aantekeninge in hierdie hoofstuk van die studiegids.

3 Doen die oefeninge aan die einde van die hoofstuk in die handboek.

Jy kan net Wiskunde LEER as jy Wiskunde DOEN!

HUURKOOPOOREENKOMSTE

$$A = P(1 + in)$$

Let Wel:
Enkelvoudige rente

Voorbeeld:

Kelvin koop rekenaartoerusting op huurkoop vir R20 000.
Hy moet 'n deposito van 10% betaal en betaal die bedrag maandeliks oor 3 jaar af. Die rentekoers is 15% p.j.

Deposito = 10% van R20 000 = R2 000.
Hy moet altesaam $A = 18\,000(1 + 0{,}15 \times \mathbf{3}) = R26\,100$ terugbetaal.
36 maandelikse paaiemente van R26 100$\div\, 36 =$ R725 elk.

INFLASIE / VERHOGING IN PRYS OF WAARDE

Let Wel:
Saamgestelde rente

$$A = P(1 + i)^n$$

n= aantal **jaar**

WAARDEVERMINDERING

Kies die korrekte formule.

Reglynige metode	Afnemende balans-metode
$A = P(1 - in)$	$A = P(1 - i)^n$

n= aantal **jaar**

Hoofstuk 4

Finansies, Groei en Verval

NOMINALE EN EFFEKTIEWE RENTEKOERS

$$(1+i_{eff}) = \left(1+\frac{i_{nom}}{m}\right)^{m}$$

Let Wel: m = die **aantal keer per jaar** wat rente bygetel word

Daagliks: $m = 365$

Maandeliks: $m = 12$

Kwartaalliks: $m = 4$

VOORBEELD:

Wat is die effektiewe koers as die nominale koers 18% p.j., kwartaalliks saamgestel, is?

Met ander woorde:

Watter koers, **jaarliks saamgestel**, sal dieselfde opbrengs gee as 18%, kwartaalliks saamgestel?

$$i_{eff} = \left(1+\frac{0{,}18}{4}\right)^{4} - 1$$

=0,1925186...

Effektiewe koers = 19,25%

TOEKOMSTIGE WAARDE-ANNUÏTEITE

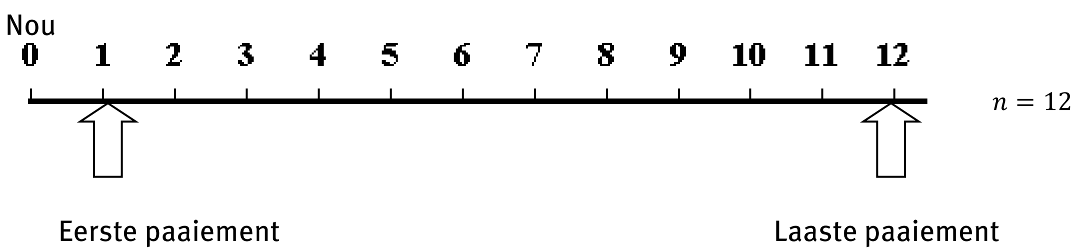
$$F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}$$

KERNWOORDE:

- Gereelde beleggings (maandeliks/kwartaalliks, ens.)
- Delgingsfondse
- Annuïteit/pensioen

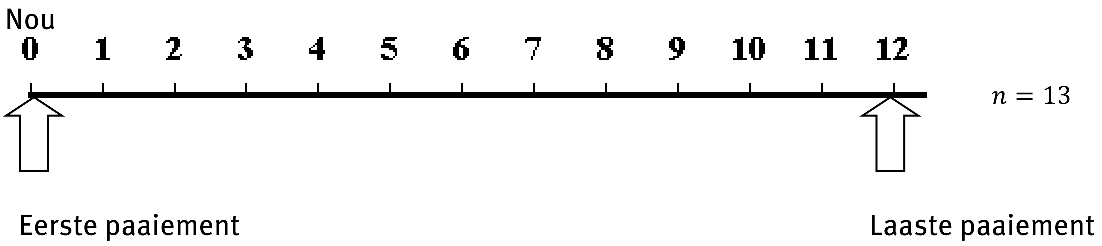
<u>Voorbeeld 1</u>

Eerste paaiement oor een maand. Laaste paaiement oor een jaar.



Voorbeeld 2

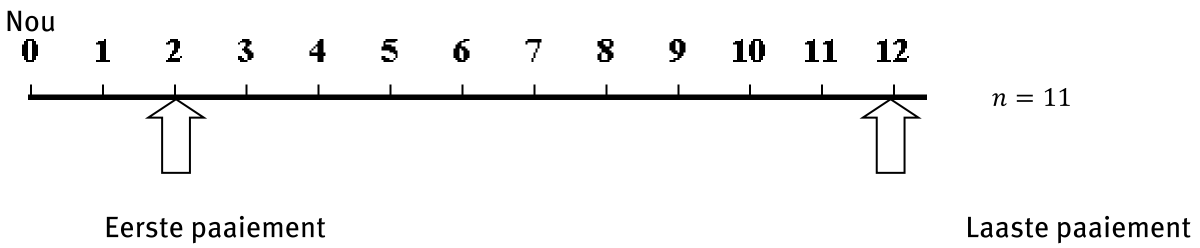
Eerste paaiement onmiddellik. Laaste paaiement oor een jaar.



$n = 13$

Voorbeeld 3

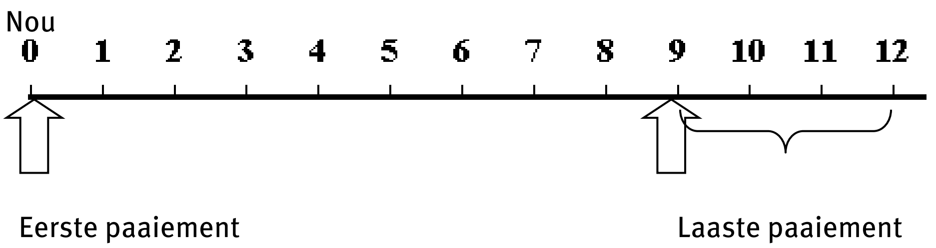
Aanvaar 'n belegging se uitkeerdatum is oor een jaar, maar die eerste paaiement is 2 maande gelede betaal en die laaste paaiement word oor een jaar betaal.



$n = 11$

Voorbeeld 4 **(Kyk mooi!)**

Die eerste paaiement word onmiddellik betaal, maar die laaste paaiement oor 9 maande.



$n = 10$

$$F = \frac{x[(1+i)^{10}-1]}{i}(1+i)^3$$

MAAR die belegging verdien nog **3 maande** rente voor dit uitbetaal word.

TOEKOMSTIGE WAARDE-ANNUÏTEITE

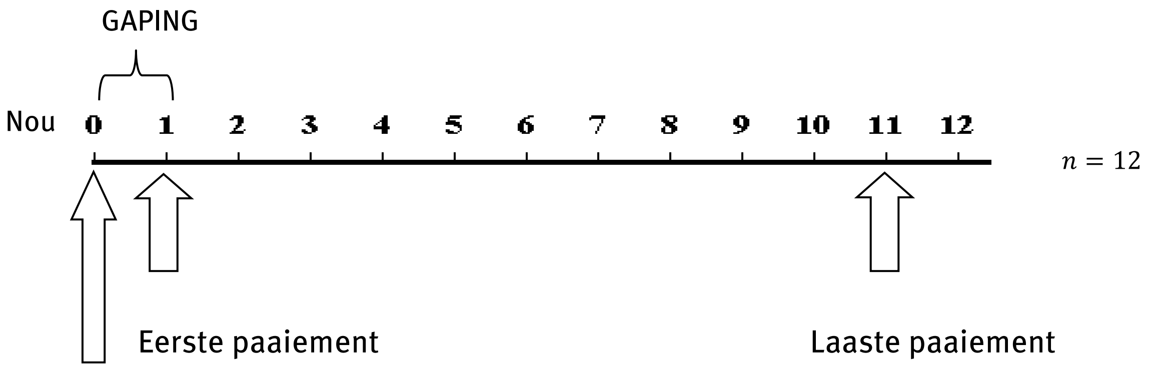
$$P = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$$

KERNWOORDE

- Gereelde paaiemente (maandeliks/kwartaalliks, ens.)
- Lening (NIE HUURKOOP NIE)
- Verband (huisverband)
- Afbetaling van skuld
- Hoe lank sal geld genoeg wees om gereelde inkomste te verskaf?

<u>Voorbeeld 1</u>

Afbetaling begin een maand na die toekenning van die lening; die laaste paaiement oor een jaar.

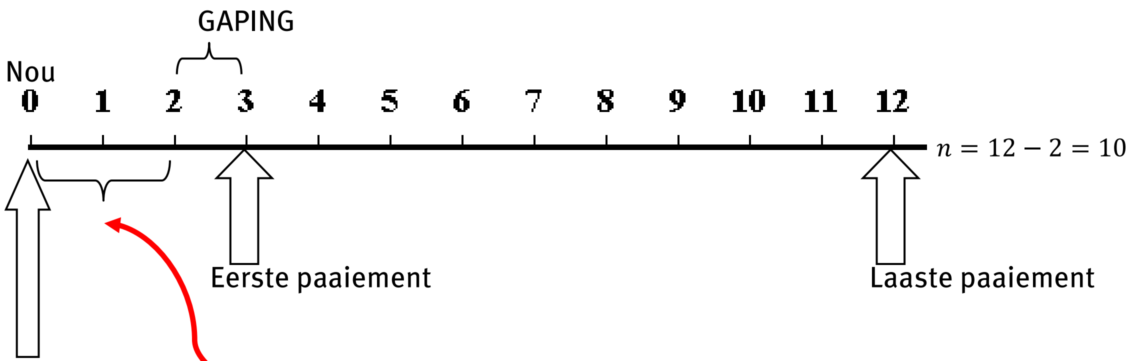


Toekenning van lening

$$P = \frac{x[1-(1+i)^{-12}]}{i}$$

<u>Voorbeeld 2</u>

Afbetaling begin oor 3 maande. Die laaste paaiement word oor een jaar betaal.



Toekenning van lening

Let Wel: Leningbedrag verdien rente vir **2 maande**: $P(1+i)^2 = \frac{x[1-(1+i)^{-10}]}{i}$

UITSTAANDE BALANS VAN LENING

Opsie 1
Gebruik P-formule
n = **aantal paaiemente oor**

Opsie 2
Gebruik A- en F-formule
n = **aantal paaiemente**
reeds betaal

Voorbeeld

'n Lening word oor 20 jaar in maandelikse paaiemente van R6 000 afbetaal. Die rentekoers is 15% p.j., maandeliks saamgestel. Wat is die uitstaande balans na 12½ jaar?

Opsie 1

Uitstaande tydperk = 7½ jaar = **90** maande

$$Balans = \frac{6\ 000\left[1-\left(1+\frac{0,15}{12}\right)^{-90}\right]}{\frac{0,15}{12}}$$

Opsie 2

Paaiemente reeds betaal = $12\frac{1}{2}$ x 12 = **150 paaiemente reeds betaal**

Uitstaande balans $= A - F$

$$\text{Balans} = P\left(1+\frac{0,15}{12}\right)^{150} - \frac{6\ 000\left[\left(1+\frac{0,15}{12}\right)^{150}-1\right]}{\frac{0,15}{12}}$$ waar P die oorspronklike leningbedrag is

Gemengde oefening oor Finansies, Groei en Verval

1. Bepaal deur berekening watter van die volgende beleggings die beste is as R15 000 vir 5 jaar belê word teen:
   a. 10,6% p.j. enkelvoudige rente
   b. 9,6% rente p.j., kwartaalliks saamgestel.

2. 'n Bedrag geld word nou belê teen 8,5% p.j., maandeliks saamgestel, om oor 5 jaar tot R95 000 te groei.
   a. Word 8,5% die effektiewe of die nominale rentekoers genoem?
   b. Bereken die bedrag wat nou belê moet word.
   c. Bereken die rente wat op hierdie belegging verdien word.

3. Shirley wil 'n platskerm-TV koop. Die TV wat sy wil hê, kos nou R8 000.
   a. Die TV se prys sal met die inflasiekoers, wat 6% per jaar is, styg. Hoeveel sal die TV oor twee jaar kos?
   b. Shirley deponeer vir twee jaar R2 000 in haar spaarrekening aan die begin van elke tydperk van ses maande (wat onmiddellik begin). Rente op haar spaargeld word teen 7% per jaar, sesmaandeliks saamgestel, betaal. Sal sy oor twee jaar genoeg geld hê om die TV te koop? Toon al jou berekeninge.

4. Bereken:
   a. die effektiewe rentekoers tot 2 desimale plekke as die nominale rentekoers 7,85% p.j., maandeliks saamgestel, is
   b. die nominale rentekoers as rente op 'n belegging kwartaalliks volgens 'n effektiewe rentekoers van 9,25% p.j. saamgestel word.

5. Die waarde van toerusting wat oorspronklik R350 000 werd was, het na 3 jaar volgens die afnemende balans-metode tot R179 200 verminder. Bepaal die jaarlikse koers van waardevermindering.

6. R20 000 word teen 9,75% p.j., kwartaalliks saamgestel, in 'n nuwe spaarrekening gedeponeer. Na 18 maande word nog R10 000 gedeponeer. Na 'n verdere 3 maande verander die rentekoers na 9,95% p.j., maandeliks saamgestel. Bepaal die balans in die rekening 3 jaar na die rekening oopgemaak is.

7. 'n Maatskappy koop nuwe toerusting ter waarde van R900 000, en die toerusting moet oor 5 jaar vervang word. Die waarde van die toerusting verminder teen 15% per jaar volgens die afnemende balans-metode. Na 5 jaar kan die toerusting tweedehands teen die verminderde waarde verkoop word. Die inflasiekoers op die prys van die toerusting is 18% per jaar.

a Die maatskappy wil ’n delgingsfonds begin om die toerusting oor 5 jaar te vervang. Bereken wat die waarde van die delgingsfonds moet wees om die toerusting dan te kan vervang.

b Bereken die kwartaallikse bedrag wat die maatskappy in die delgingsfonds moet betaal om die toerusting oor 5 jaar te kan vervang. Die maatskappy maak die eerste betaling onmiddellik en die laaste betaling aan die einde van die tydperk van 5 jaar. Die rentekoers vir die delgingsfonds is 8% per jaar, kwartaalliks saamgestel.

8 Goedere ter waarde van R1 500 word op huurkoop gekoop en in 24 maandelikse paaiemente van R85 afbetaal. Bereken die jaarlikse rentekoers wat vir die huurkoopooreenkoms geld.

9 Pieter kry ’n verband om ’n huis te koop. Hy betaal die verband oor ’n tydperk van 20 jaar in maandelikse paaiemente van R6 500 af. Pieter kwalifiseer vir ’n rentekoers van 12% per jaar, maandeliks saamgestel. Hy betaal sy eerste paaiement een maand na die verband toegestaan is.

a Bereken die bedrag wat Pieter geleen het.

b Bereken die bedrag wat Pieter nog op sy huis skuld nadat hy die verband 8 jaar lank afbetaal het.

10 Megan se pa wil voorsiening vir haar studie maak. Hy begin op haar 12de verjaardag maandeliks R1 000 in ’n belegging betaal. Hy maak die laaste betaling op haar 18de verjaardag. Sy het die geld 5 maande na haar 18de verjaardag nodig. Die rentekoers op die belegging is 10% per jaar, maandeliks saamgestel. Bereken die bedrag wat Megan vir haar studie beskikbaar het.

11 Stefan begin om maandeliks R300 in ’n belegging te belê, en hy begin een maand van nou af. Hy verdien rente van 9% per jaar, maandeliks saamgestel. Vir hoe lank moet hy hierdie maandelikse beleggings maak sodat die totale waarde van sy belegging R48 000 kan wees? Gee jou antwoord soos volg: ____ jaar en ____ maande.

12 Carl koop klanktoerusting ter waarde van R15 000 op huurkoop. Die handelaar vereis dat hy ’n deposito van 10% betaal. Die rentekoers is 12% per jaar en hy moet die geld maandeliks oor 4 jaar terugbetaal. Dit is verpligtend vir hom om die toerusting teen ’n premie van R30 per maand deur die handelaar te verseker. Bereken die totale bedrag wat Carl maandeliks vir die handelaar moet betaal.

13 Tony leen geld ter waarde van R400 000. Hy moet die geld in 16 kwartaallikse paaiemente terugbetaal, maar moet sy eerste paaiement een jaar van nou betaal. Die rentekoers is 8% per jaar, kwartaalliks saamgestel. Bereken die kwartaallikse paaiement wat Tony moet betaal.

Oorsig

Hoofstuk 5 Bladsy 104 Saamgestelde hoeke	**Eenheid 1 Bladsy 104**	
	Afleiding van 'n formule vir $cos(\alpha - \beta)$	• Hoe om 'n formule vir $cos(\alpha - \beta)$ af te lei
	Eenheid 2 Bladsy 108	
	Formules vir $\cos(\alpha + \beta)$ en $\sin(\alpha \pm \beta)$	• Formule vir $\cos(\alpha + \beta)$ • Formule vir $\sin(\alpha + \beta)$ • Formule vir $\sin(\alpha - \beta)$
	Eenheid 3 Bladsy 112	
	Dubbelhoeke	• Formule vir $\sin 2\alpha$ • Formule vir $cos2\alpha$
	Eenheid 4 Bladsy 116	
	Identiteite	• Bewys van identiteite • Bepaling van die waarde(s) waarvoor die identiteit nie gedefinieer is nie
	Eenheid 4 Bladsy 120	
	Vergelykings	• Vergelykings met saamgestelde hoeke en dubbelhoeke
	Eenheid 4 Bladsy 124	
	Trigonometriese grafieke en saamgestelde hoeke	• Teken en werk met grafieke van saamgestelde hoeke

ONTHOU, JOU STUDIEBENADERING MOET WEES:

1 Werk deur al die voorbeelde in hierdie hoofstuk van jou handboek.
2 Werk deur die aantekeninge in hierdie hoofstuk van die studiegids.
3 Doen die oefeninge aan die einde van die hoofstuk in die handboek.
4 Doen die gemengde oefeninge aan die einde van hierdie hoofstuk in die studiegids.

Jy kan net Wiskunde LEER as jy Wiskunde DOEN!

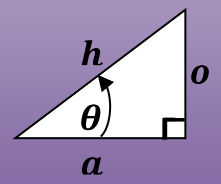
Hoofstuk 5

Saamgestelde hoeke

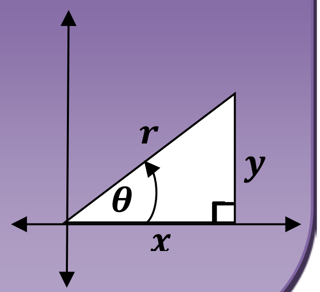
HERSIENING VAN TRIGONOMETRIE

BASIESE TRIGONOMETRIESE VERHOUDINGS

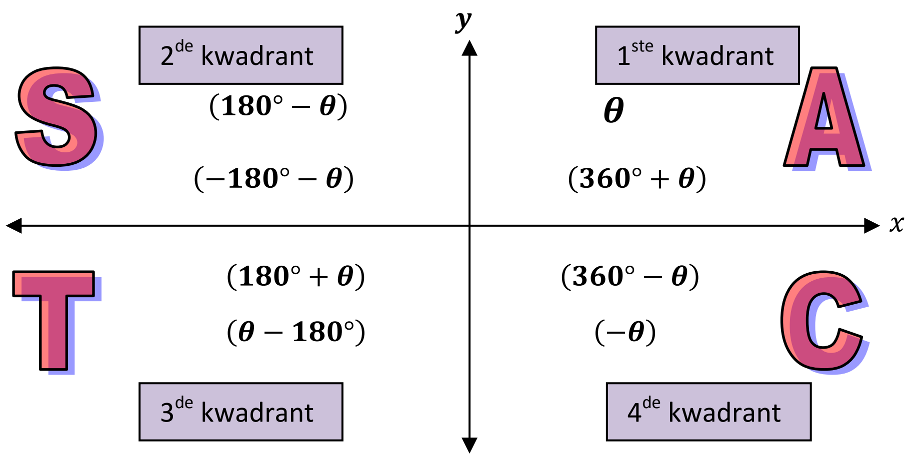
Verhouding	Inverse
$sin\theta = \frac{o}{h}$	$cosec\theta = \frac{h}{o}$
$cos\theta = \frac{a}{h}$	$sec\theta = \frac{h}{a}$
$tan\theta = \frac{o}{a}$	$cot\theta = \frac{a}{o}$



Verhouding	Inverse
$sin\theta = \frac{o}{h}$	$cosec\theta = \frac{h}{o}$
$cos\theta = \frac{a}{h}$	$sec\theta = \frac{h}{a}$
$tan\theta = \frac{o}{a}$	$cot\theta = \frac{a}{o}$



JY MOET WEET IN WATTER KWADRANT 'N HOEK LÊ EN WATTER VERHOUDING (EN SY INVERSE) POSITIEF DAAR IS:



Hoofstuk 5

Saamgestelde hoeke

REDUKSIEFORMULES

y

$sin(180° - \theta)$	$sin\theta$
$cos(180° - \theta)$	$-cos\theta$
$tan(180° - \theta)$	$-tan\theta$

x

$sin(180° + \theta)$	$-sin\theta$
$cos(180° + \theta)$	$-cos\theta$
$tan(180° + \theta)$	$tan\theta$

$sin(360° - \theta)$	$-sin\theta$
$cos(360° - \theta)$	$cos\theta$
$tan(360° - \theta)$	$-tan\theta$

KO-VERHOUDINGS/KO-FUNKSIES

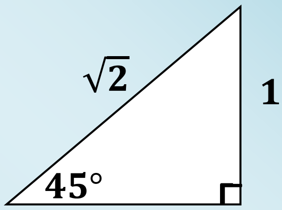
Verhouding	Ko-verhouding
$sin(90° - \theta)$	$cos\theta$
$cos(90° - \theta)$	$sin\theta$
$tan(90° - \theta)$	$cot\theta$

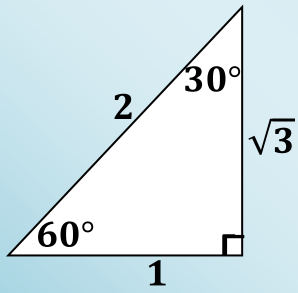
$(90° - \theta)$
is in 1ste kwadrant

Verhouding	Ko-verhouding
$sin(90° + \theta)$	$cos\theta$
$cos(90° + \theta)$	$-sin\theta$
$tan(90° + \theta)$	$-cot\theta$

$(90° + \theta)$
is in 2de kwadrant

KEN JOU SPESIALE DRIEHOEKE!





IDENTITEITE

$$tan\theta = \frac{sin\theta}{cos\theta} \text{ en } cot\theta = \frac{1}{tan\theta} = \frac{cos\theta}{sin\theta}$$

VIERKANT-IDENTITEITE:

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

Hieruit volg dat:

$$\therefore cos^2\theta = 1 - sin^2\theta$$

$$\therefore sin^2\theta = 1 - cos^2\theta$$

Let op dat die twee identiteite hierbo albei as verskille van twee vierkante GEFAKTORISEER kan word:

$$cos^2\theta = 1 - sin^2\theta = (1 - sin\theta)(1 + sin\theta)$$

SAAMGESTELDE HOEK-IDENTITEITE

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

DUBBELHOEK-IDENTITEITE

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\begin{aligned}\cos 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ &= 1 - 2\sin^2\alpha \\ &= 2\cos^2\alpha - 1\end{aligned}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

WENKE VIR DIE BEWYS VAN IDENTITEITE

- **Werk afsonderlik met die LK en RK.**
- **Skryf DUBBELhoeke as ENKELhoeke.**
- **Kyk uit vir VIERKANT-IDENTITEITE.**
- **Skryf alles in terme van $\sin$ en $\cos$.**
- **Sit ALLES oor die KGV wanneer jy met breuke werk.**
- **Wees op die uitkyk vir geleenthede om te FAKTORISEER, bv.**
  - $2\sin\alpha\cos\alpha - \sin\alpha = \sin\alpha(2\cos\alpha - 1)$
  - $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = (\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\alpha - \sin\alpha)$
  - $2\sin^2\alpha + \sin\alpha - 1 = (2\sin\alpha - 1)(\sin\alpha + 1)$.
- **Dit is soms nodig om 1 met $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha$ te vervang,**

  bv. $\sin 2\alpha + 1 = 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin^2\alpha + \cos^2\alpha$

  $= (\sin\alpha + \cos\alpha)^2$.

BEPALING VAN DIE ALGEMENE OPLOSSING VAN ’N TRIGONOMETRIESE VERGELYKING		
STAP		VOORBEELDE VAN HOE OM DIE STAP TOE TE PAS
Kry trigonometriese verhouding (sin/cos/tan) alleen aan LK **Een waarde alleen aan RK**	A B C	$2\sin 3x = 0{,}4$ $sin3x = 0{,}2$ $\frac{1}{3}cosx = -0{,}2$ $cosx = -0{,}6$ $2\tan(x - 10°) + 3 = 0$ $\tan(x - 10°) = -\frac{3}{2}$
Gebruik nou RK bestaande uit ’n: **TEKEN (+ of -) en ’n WAARDE** **Dui kwadrant aan** **Kry verwysingshoek deur die volgende te gebruik:** $\boldsymbol{sin^{-1}(+waarde)}$ $\boldsymbol{cos^{-1}(+waarde)}$ **Of** $\boldsymbol{tan^{-1}(+waarde)}$	A B C	$sin3x = +0{,}2$ Die + dui die 1^{ste} en 2^{de} kwadrant aan, waar sin positief is. Verwysings $\angle = sin^{-1}(0{,}2) = 11{,}54°$ $cosx = -0{,}6$ Die – dui die 2^{de} en 3^{de} kwadrant aan, waar cos negatief is. Verwysings $\angle = cos^{-1}(0{,}6) = 53{,}13°$ $\tan(x - 10°) = -\frac{3}{2}$ Die – dui die 2^{de} en 4^{de} kwadrant aan, waar tan negatief is. Verwysings $\angle = tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56{,}31°$
Die hoek in die trigonometriese vergelykings sal met die volgende in die onderskeidelike kwadrante vergelyk word: **1^{ste} = Verwysings $\angle$** **2^{de} = $180°$ − Verwysings $\angle$** **3^{de} = $180°$ + Verwysings $\angle$** **4^{de} = $360°$ − Verwysings $\angle$** $+k360°; k \in Z$ vir sin/cos of $+k180°; k \in Z$ vir tan **Los dan op vir x.**	A B C	$2\sin 3x = 0{,}4$ $sin3x = 0{,}2$ 1^{ste}: $3x = 11{,}54° + k360°\ ;\ k \in Z$ $x = 3{,}85° + k120°$ OF 2^{de}: $3x = 180° - 11{,}54° + k360°$ $x = 56{,}15° + k120°$ $\frac{1}{3}cosx = -0{,}2$ $cosx = -0{,}6$ 2^{de}: $x = 180° - 53{,}13° + k360°;\ k \in Z$ $x = 126{,}87° + k360°$ OF 3^{de}: $x = 180° + 53{,}13° + k360°$ $x = 233{,}13° + k360°$ $2\tan(x - 10°) + 3 = 0$ $\tan(x - 10°) = -\frac{3}{2}$ 2^{de}: $x - 10° = 180° - 56{,}31° + k180°;$ $k \in Z$ $x = 133{,}69° + k180°$

VERGELYKINGS WAT TWEE TRIGONOMETRIESE FUNKSIES BEHELS	
VOORBEELDE	KOMMENTAAR
1 $\boldsymbol{sinx = cosx}$ $\boldsymbol{\frac{sinx}{cosx} = \frac{cosx}{cosx}}$ $\boldsymbol{tanx = 1}$ $\boldsymbol{x = 45° + k.180°\ ;\ k\epsilon Z}$	÷ deur $cosx$ aan albei kante
2 $\boldsymbol{sinx = cos3x}$ $\boldsymbol{cos(90° - x) = cos3x}$ $\boldsymbol{90° - x = 3x + k.360°\ ;\ k\epsilon Z}$ $\boldsymbol{-4x = -90° + k.360°}$ $\boldsymbol{x = 22{,}5° - k.90°}$ **of** $\boldsymbol{90° - x = -3x + k.360°\ ;\ k\epsilon Z}$ $\boldsymbol{2x = -90° + k.360°}$ $\boldsymbol{x = -45° + k.180°}$	Mag NIE albei kante deur $cosx$ deel nie Trigonometriese funksie moet aan albei kante dieselfde wees Hoeke aan LK en RK moet óf dieselfde wees óf in twee verskillende kwadrante wees waar cos dieselfde teken het (1ste en 4de kwadrant)
3 $\boldsymbol{\sin(x + 20°) = \cos(2x - 30°)}$ $\boldsymbol{cos[90° - (x + 20°)] = cos(2x - 30°)}$ $\boldsymbol{cos(70° - x) = cos(2x - 30°)}$ $\boldsymbol{70° - x = 2x - 30° + k.360°}$ $\boldsymbol{-3x = -100° + k.360°}$ $\boldsymbol{x = 33{,}33° - k.120°\ ;\ k \in Z}$ **of** $\boldsymbol{70° - x = -(2x - 30°) + k.360°}$ $\boldsymbol{x = -40° + k.360°}$	Alternatief: sin aan albei kante $sin(x + 20°) = cos(2x - 30°)$ $sin(x + 20°) = \sin[90° - (2x - 30°)]$ $sin(x + 20°) = sin(120° - 2x)$ $x + 20° = 120° - 2x + k.360°$ $3x = 100° + k.360°$ $x = 33{,}33° - k.120°\ ;\ k \in Z$ of $x + 20° = 180° - (120° - 2x) + k.360°$ $-x = 40° + k.360°$ $x = -40° - k.360°$

VOORBEELDE VAN VERGELYKINGS WAT DUBBELHOEKE BEHELS

$$\cos\theta.\cos 14^{\circ} + \sin\theta.\sin 14^{\circ} = 0,715$$
$$\cos(\theta - 14^{\circ}) = 0,715$$

Verwysings $\angle = 44,36^{\circ}$

1ste kwadrant:

$$\theta - 14^{\circ} = 44,36^{\circ} + k.360^{\circ}$$
$$\theta = 58,36^{\circ} + k.360^{\circ}; k \in Z$$

4de kwadrant:

$$\theta - 14^{\circ} = -44,36^{\circ} + k.360^{\circ}$$
$$\theta = -30,36^{\circ} + k.360^{\circ}; k \in Z$$

$$\sin 2\theta + 2\sin\theta = 0$$
$$2\sin\theta\cos\theta + 2\sin\theta = 0$$
$$2\sin\theta(\cos\theta + 1) = 0$$

$\sin\theta = 0$ **of** $\cos\theta = -1$

$\theta = k.180^{\circ}; k \in Z$ **of** $\theta = 180^{\circ} + k.360^{\circ}$

$$2\sin^2\theta + \sin\theta = 3$$
$$2\sin^2\theta + \sin\theta - 3 = 0$$
$$\therefore (2\sin\theta + 3)(\sin\theta - 1) = 0$$

$2\sin\theta + 3 = 0$ **of** $\sin\theta + 1 = 0$

$\sin\theta = -\frac{3}{2}$ **of** $\sin\theta = -1$

Geen oplossing nie $\theta = 270^{\circ} + k.360^{\circ}; k \in Z$

PROBLEME MET SAAMGESTELDE HOEKE WAT SONDER 'N SAKREKENAAR GEDOEN MOET WORD

- **Skryf gegewe inligting in 'n vorm waar die trigonometriese funksie ALLEEN aan die LK is.**
- **Kies die KWADRANT en teken die DRIEHOEK in die regte kwadrant (2 sye van die driehoek sal bekend wees).**
- **Gebruik die stelling van PYTHAGORAS om die 3^de^ sy te bepaal.**
- **Werk nou met die uitdrukking waarvan jy die waarde moet kry: skryf alle saamgestelde hoeke of dubbelhoeke in terme van ENKELHOEKE.**
- **VERVANG nou die WAARDES van die diagram(me) en VEREENVOUDIG.**

Voorbeeld:

As $13sinx\alpha + 12 = 0$ en $\alpha \in [90°; 270°]$ en $cos\beta = \frac{5}{13}$; $\beta > 90°$, bepaal die waarde van die volgende sonder om 'n sakrekenaar te gebruik:

a $sin(\alpha - \beta)$ **b** $cos(\alpha + \beta)$

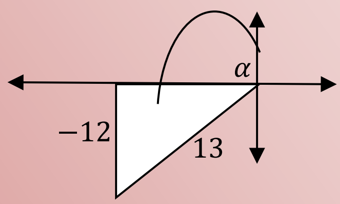
c $sin2\alpha$ **d** $cos2\beta$

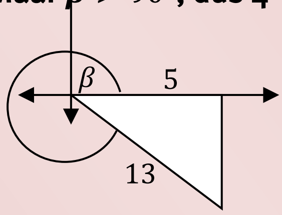
Oplossing:

$sin\alpha = -\frac{12}{13}$ $cos\beta = \frac{5}{13}$

sin **negatief in 3de en 4de kwadrant** cos **positief in 1ste en 4de kwadrant**

Maar $\alpha \in [90°; 270°]$, dus 3de kwadrant **Maar $\beta > 90°$, dus 4de kwadrant**





$x = -5$ $y = -12$

a $sin(\alpha - \beta) = sin\alpha\ sin\beta - cos\alpha\ cos\beta = \left(\frac{-12}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{-5}{13}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) = \frac{-120}{169}$

b $cos(\alpha + \beta) = cos\alpha\ cos\beta - sin\alpha\ sin\beta = \left(\frac{-5}{13}\right)\left(\frac{5}{13}\right) - \left(\frac{-12}{13}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) = -1$

c $sin2\alpha = 2sin\alpha\ cos\alpha = 2\left(\frac{-12}{13}\right)\left(\frac{-5}{13}\right) = \frac{120}{169}$

Gemengde oefening oor Saamgestelde hoeke

1 Los die volgende vergelykings vir x op. Gee die algemene oplossing tensy anders gevra. Antwoorde moet korrek tot 2 desimale plekke gegee word waar presiese antwoorde nie moontlik is nie.

a $2cos2x + 1 = 0$

b $sin\, x = 3\cos x$ vir $x \in [90°; 360°]$

c $sinx = \cos 3x$

d $6 - 10cosx = 3sin^2x; \;\; x \in [-360°; 360°]$

e $2 - sinx\; cosx - 3cos^2x = 0$

f $3sin^2x - 8sinx + 16sinx\; cosx - 6cosx + 3cos^2x = 0$

2 Bewys die volgende identiteite en noem enige waardes van x of θ waarvoor die identiteit nie geldig is nie.

a $\cos x + \tan x \sin x = \dfrac{1}{\cos x}$

b $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta} - \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta} = \dfrac{1}{\sin\theta}$

c $\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \tan x \sin x$

d $\dfrac{\sin^3 x + \sin x \cos^2 x}{\cos x} = \tan x$

e $\dfrac{1+\tan x}{1-\tan x} = \dfrac{1+2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

f $\sin(45° + x)\,.\sin(45° - x) = \frac{1}{2}cos2x$

g $\dfrac{\sin 2\theta - \cos\theta}{\sin\theta - \cos 2\theta} = \dfrac{\cos\theta}{1+\sin\theta}$

h $\frac{\cos x - \cos 2x + 2}{3\sin x - \sin 2x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$

3 Vereenvoudig:

a $\frac{\sin(180^0 - x)\tan(-x)}{\tan(180^0 + x)\cos(x - 90^0)}$

b $\frac{\sin(180^0 + x)\tan(x - 360^0)}{\tan(360^0 - x)\cos 240^0 \tan 225^0}$ (sonder om 'n sakrekenaar te gebruik)

4 Gegee dat $sin17° = k$, druk die volgende in terme van k uit.

a $\cos 73^o$

b $cos(-163^o)$

c $tan197^o$

d $cos326^o$

5 Gegee dat $5cosx + 4 = 0$, bereken die volgende waarde(s) sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.

a $5sinx + 3tanx$

b $\tan 2x$

6 As $3sinx = -1$; $x \in [90°; 270°]$ en $tany = \frac{3}{4}$; $y \in [90°; 360°]$. Bepaal die volgende waardes sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.

a $\cos(x - y)$

b $cos2x - cos2y$

7 Vereenvoudig sonder om 'n sakrekenaar te gebruik.

a $cos^2 22{,}5° - sin^2 22{,}5°$

b $sin22{,}5°\ cos22{,}5°$

c $2sin15°cos15°$

Oorsig

Hoofstuk 6 Bladsy 138 Oplossing van probleme in drie dimensies	Eenheid 1 Bladsy 142	
	Probleme in drie dimensies	• Trigonometrie in die werklikheid
	Eenheid 2 Bladsy 146	
	Saamgestelde hoek-formules in drie dimensies	• Gebruik van saamgestelde hoek-formules in drie dimensies

ONTHOU, JOU STUDIEBENADERING MOET WEES:

1. Werk deur al die voorbeelde in hierdie hoofstuk van jou handboek.
2. Werk deur die aantekeninge in hierdie hoofstuk van die studiegids.
3. Doen die oefeninge aan die einde van die hoofstuk in die handboek.
4. Doen die gemengde oefeninge aan die einde van hierdie hoofstuk in die studiegids.

Jy kan net Wiskunde LEER as jy Wiskunde DOEN!

HERSIENING VAN DIE GEBRUIK VAN DIE $sinus-$, $cosinus-$ en $oppervlakte-$FORMULES			
INLIGTING GEGEE	ONBEKEND	FORMULE OM TE GEBRUIK	VORM VAN FORMULE
2 hoeke en 1 sy (∠∠s)	s	sin-reël	$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$ a is onbekend
2 sye en 'n nie-ingeslote ∠ (ss∠)	∠	sin-reël **Oppas** vir dubbelsinnige geval! ∠ kan skerp of stomp wees	$\frac{\sin A}{a}=\frac{\sin B}{b}$ A is onbekend
2 sye en 'n ingeslote ∠ (s∠s)	s	cos-reël	$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ a is onbekend
3 sye (sss)	∠	cos-reël	$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ A is onbekend
2 sye en 'n ingeslote ∠	Oppervlakte	Oppervlaktereël	**Oppervlakte** van $\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C$ **Oppervlakte** is onbekend
Oppervlakte, sy en ∠	s	Oppervlaktereël	$b=\frac{2\times Oppervlakte}{a\sin C}$ b is onbekend

Hoofstuk 6

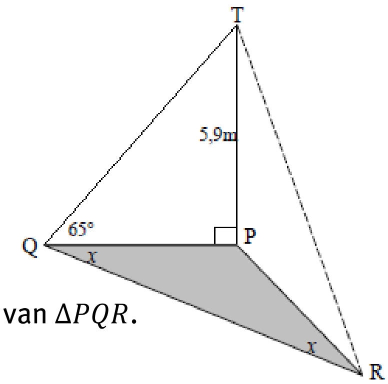
Oplossing van probleme in drie dimensies

WENKE VIR DIE OPLOSSING VAN PROBLEME IN DRIE DIMENSIES

- **Waar daar 3 driehoeke is, begin jy met die Δ met die meeste inligting en werk via die 2de Δ na die 3de Δ , wat die onbekende wat bereken moet word, bevat.**
- **Dui alle regte hoeke aan. Onthou, hulle lyk nie altyd soos $90°$-hoeke nie.**
- **Kleur die horisontale vlak in die diagram in (bv. vloer, grond).**
- **Wees op die uitkyk vir reduksies soos $cos(90° - \alpha) = sin\alpha$ en $sin(180° - \alpha) = sin\alpha$ om uitdrukkings te vereenvoudig.**
- **Gebruik saamgestelde en dubbelhoekformules om na enkelhoeke te herlei.**
- **Dui altyd aan in watter Δ jy werk wanneer jy die oplossing uitskryf.**

Voorbeeld

P, Q en R is op dieselfde horisontale vlak. TP is 'n vertikale toring wat 5,9 m hoog is. Die hoogtehoek van T vanaf Q is 65°. $P\hat{Q}R = P\hat{R}Q$.



a Bereken die lengte van PQ tot die naaste meter.

b Toon vervolgens aan dat $RQ = 5{,}5\ cosx$.

c As dit verder gegee word dat $x = 42°$, bereken die oppervlakte van ΔPQR.

Oplossing:

a $\frac{5{,}9}{PQ} = tan65°$

$\therefore PQ = \frac{5{,}9}{tan65°} = 2{,}75\ m$

b $Q\hat{P}R = 180° - 2$

$\frac{RQ}{sinP} = \frac{PQ}{sinR}$

$\frac{RQ}{\sin(180°-2x)} = \frac{2{,}75}{sinx}$

$\frac{RQ}{\sin 2x} = \frac{2{,}75}{sinx}$

$\frac{RQ}{2\sin x cosx} = \frac{2{,}75}{sinx}$

$\therefore RQ = 2 \times 2{,}75 cosx$

$RQ = 5{,}5\ cosx$

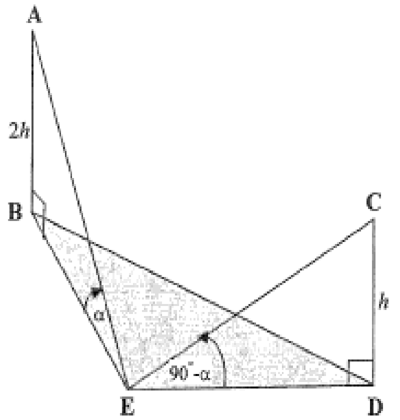
c Oppervlakte van $\Delta PQR = \frac{1}{2} \times PQ \times QR \times sinQ$

$= \frac{1}{2} \times 2{,}75 \times (5{,}5cos42°) \times sin42°$

$=$ 3,76 vierkante eenhede

Gemengde oefening oor Probleme in drie dimensies

1 In die diagram regs is B, D en E op dieselfde horisontale vlak. $B\hat{E}D = 120°$.
AB en CD is twee vertikale torings.
AB = 2CD = $2h$ meter
Die hoogtehoek vanaf E na A is α.
Die hoogtehoek vanaf E na C is $(90° - \alpha)$.



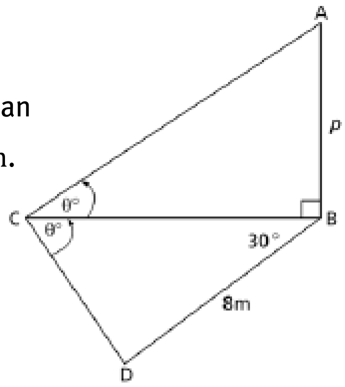
a Bepaal die lengte BE in terme van h en α.

b Toon aan dat die afstand tussen die twee torings gegee kan word as:

$BD = \frac{h\sqrt{tan^4\alpha+2tan^2\alpha+4}}{tan\alpha}$.

c Bepaal vervolgens die hoogte van die toring CD, afgerond tot die naaste meter, as $\alpha = 42°$ en BD = 400 m.

2 B, C en D is drie punte op dieselfde horisontale vlak en AB is 'n vertikale paal met lengte p meter. Die hoogtehoek van A vanaf C is θ en $B\hat{C}D = \theta$. Verder, $C\hat{B}D = 30°$ en $BD = 8$ m.

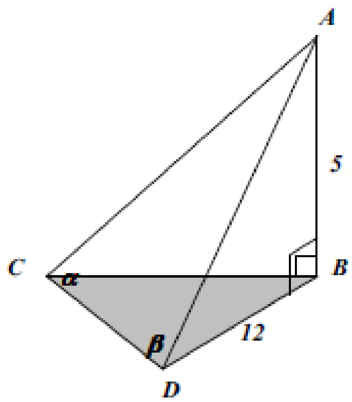


a Druk $C\hat{D}B$ in terme van θ uit.

b Toon vervolgens aan dat $p = \frac{8\sin(30°+\theta)}{cos\theta}$.

3 In die diagram regs is AB 'n vertikale vlagpaal van 5 me
AC en AD is twee ankertoue. B, C en D is op dieselfde h
$BD = 12$ m, $A\hat{C}D = \alpha$ en $A\hat{D}C = \beta$.

Toon aan dat $CD = \frac{13\sin(\alpha+\beta)}{sin\alpha}$.

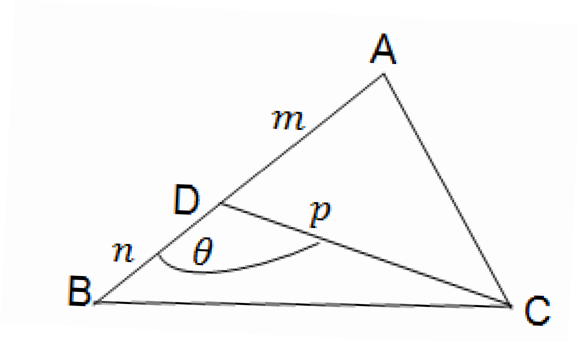


4 In ΔABC AD = m; DB = n; CD = p en $B\widehat{D}C = \theta$.

a Voltooi in terme van $m,\ p$ en θ: Oppervlakte $\Delta ADC = \cdots$

b Toon aan dat die oppervlakte van $\Delta ABC = \frac{1}{2}p(m+n)\sin\theta$.

c As die oppervlakte van $\Delta ABC = 12{,}6\ cm^2;\ \ AB = 5{,}9\ cm$ en $DC = 8{,}1\ cm$, bereken die waarde(s) van θ.

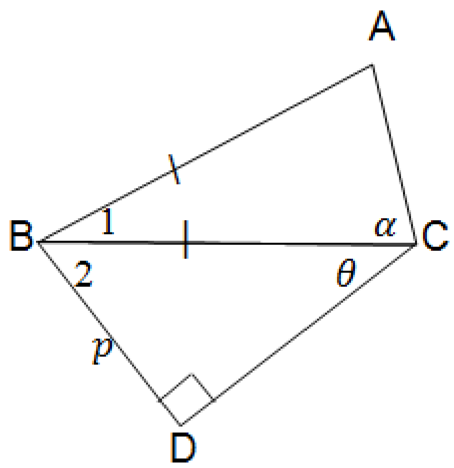


5 In die diagram is $\widehat{D} = 90°$, $B\widehat{C}D = \ \theta$, $A\widehat{C}B = \ \alpha$; AB = BC en $BD = p$ eenhede.

a Druk BC in terme van p en θ uit.

b Bepaal, sonder om redes te gee, die grootte van $\widehat{B}_1$ in terme van α.

c Bewys vervolgens dat AC = $\frac{p.\sin 2\alpha}{\sin\theta.\sin\alpha}$.



6 In die diagram is PQ 'n vertikale gebou.

Q, R en S is punte op dieselfde horisontale vlak.

Die hoogtehoek van P, die bopunt van die gebou, gemeet vanaf R, is α.

$R\widehat{Q}S = 30°$

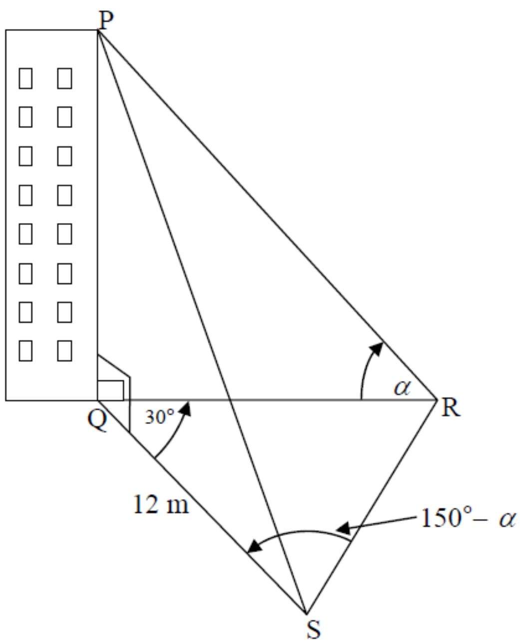
$QSR = 150° - \alpha$

$QS = 12$ m

a Toon aan dat $QR = \frac{6(cos\alpha+\sqrt{3}sin\alpha)}{sin\alpha}$.

b Toon vervolgens aan dat die hoogte PQ van die gebou gegee word deur $PQ = 6 + 6\sqrt{3}tan\alpha$.

c Bereken vervolgens die waarde van α as PQ = 23 m.



Hoofstuk 7

Polinome

Oorsig

Hoofstuk 7 Bladsy 152 Polinome	Eenheid 1 Bladsy 154	
	Die Resstelling	• Die Resstelling
	Eenheid 2 Bladsy 156	
	Die Faktorstelling	• Die Faktorstelling

ONTHOU, JOU STUDIEBENADERING MOET WEES:

1 Werk deur al die voorbeelde in hierdie hoofstuk van jou handboek.
2 Werk deur die aantekeninge in hierdie hoofstuk van die studiegids.
3 Doen die oefeninge aan die einde van die hoofstuk in die handboek.
4 Doen die gemengde oefeninge aan die einde van hierdie hoofstuk in die studiegids.

Jy kan net Wiskunde LEER as jy Wiskunde DOEN!

Hoofstuk 7
Polinome

DIE RESSTELLING

$$f(x) = \underbrace{(ax+b)}_{\text{deler}}.\underbrace{q(x)}_{\text{kwosiënt}} + \underbrace{r(x)}_{\text{res}}$$

Die resstelling kan gebruik word om die res te bereken wanneer 'n polinoom $f(x)$ gedeel word deur $(ax+b)$
$\therefore f\left(-\frac{b}{a}\right) = r(x)$.

Dit is baie belangrik om die **korrekte waarde te kies om te vervang**:

As jy f deur $g(x)$deel =	**Waarde om in $f(x)$ te vervang**
$(\boldsymbol{x-2})$	$f(2) = ?$
$(\boldsymbol{2x-1})$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = ?$
$(\boldsymbol{x+3})$	$f(-3) = ?$
$(\boldsymbol{3x+2})$	$f\left(-\frac{2}{3}\right) = ?$

DIE FAKTORSTELLING

As $f\left(-\frac{b}{a}\right) = 0$, dan is:

- $(ax+b)$ 'n **FAKTOR** van $f(x)$ en
- $f(x)$ **deelbaar deur** $(ax+b)$.

Wanneer jy x –waardes probeer wat 0 gee, probeer hulle in die volgende orde: $1;\ -1; 2;\ -2; 3;\ -3$, ens.

<table>
<tr><th colspan="2">VERSKILLENDE METODES OM 'N KUBIESE POLINOOM (3DE GRAAD) TE FAKTORISEER</th></tr>
<tr><th>METODE EN BESKRYWING VAN STAPPE</th><th>VOORBEELDE</th></tr>
<tr><td>SOM EN VERSKIL VAN DERDE MAGTE</td><td>A) $f(x) = x^3 + 27$
$= (x+3)(x^2 - 3x + 9)$
Kan nie verder faktoriseer nie
B) $f(x) = 8x^3 - 1$
$= (2x-1)(4x^2 + 2x + 1)$
Kan nie verder faktoriseer nie</td></tr>
<tr><td>FAKTORISEER DEUR GROEPERING
• Groepeer terme in twee pare.
• Haal gemene faktor uit elke paar.
• Twee stelle hakies word nou die gemene faktor.
• Faktoriseer die hakie verder, indien moontlik.</td><td>$f(x) = \mathbf{x^3 + 3x^2 - 4x - 12}$
$= x^2(\mathbf{x+3}) - 4(\mathbf{x+3})$
$= (\mathbf{x+3})(\mathbf{x^2 - 4})$
$= (x+3)(\mathbf{x+2})(\mathbf{x-2})$</td></tr>
<tr><td>FAKTORISEER DEUR INSPEKSIE
• Bepaal een lineêre faktor met behulp van die faktorstelling.
• Bepaal die ander faktor (kwadratiese uitdrukking) deur inspeksie.</td><td>$f(x) = 2x^3 \mathbf{- 2x^2} - 10x - 6$
$f(-1) = 2(-1)^3 - 2(-1)^2 - 10(-1) - 6 = 0$
$\therefore (x+1)$ is 'n faktor
$f(x) = (x+1)(\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c})$
Bepaal nou hierdie koëffisiënte
Begin met $\mathbf{a}$ en $\mathbf{c}$:
$1 \times a = 2 \quad \therefore a = 2$
$1 \times c = -6 \therefore c = 6$
Jy moet nou $\mathbf{b}$ bepaal:
Vermenigvuldig die twee hakies;
die twee x^2-terme moet jou $\mathbf{-2x^2}$ gee:
$f(x) = (x+1)(\mathbf{2}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{6})$
$bx^2 + 2x^2 = \mathbf{-2x^2} \quad \therefore b = -4$
$\therefore f(x) = (x+1)(2x^2 - 4x + 6)$
$= (x+1)(2x+2)(x-3)$</td></tr>
<tr><td>SINTETIESE OF LANGDELING
• Bepaal een lineêre faktor met behulp van die faktorstelling.
• Bepaal die ander faktor (kwadratiese uitdrukking) deur langdeling of sintetiese deling (SIEN VOLGENDE BLADSY).</td><td>$f(x) = 2x^3 \mathbf{- 2x^2} - 10x - 6$
$f(-1) = 2(-1)^3 - 2(-1)^2 - 10(-1) - 6 = 0$
$\therefore (x+1)$ is 'n faktor
$f(x) = (x+1)(\mathbf{a}x^2 + \mathbf{b}x + \mathbf{c})$
Bepaal a, b, c deur sintetiese deling te gebruik.</td></tr>
</table>

SINTETIESE DELING

$f(-1) = 0$, dus is $(x + 1)$ 'n faktor

$f(-1) = 0$ $\qquad\qquad$ $f(x) = 2x^3 - 2x^2 - 10x - 6$

−1	**2**	**−2**	**−10**	**−6**
		−2	**4**	**6**
	2	**−4**	**−6**	**0**

Hierdie metode word SINTETIESE deling genoem omdat ons nie regtig deel nie. Ons vermenigvuldig eintlik en tel op.

Let op die volgende:

- Die x-waarde van -1 wat vir ons die faktor $(x + 1)$ gegee het, word aan die LK geskryf.
- Die koëffisiënte van die derdegraadse polinoom word in die boonste ry geskryf.
- Die eerste koëffisiënt, 2, word af na die laaste ry oorgedra.
- Begin nou aan die linkerkant.
  VERMENIGVULDIG al langs die stippelpyltjie $\qquad$ herhaal
  en skryf die OPLOSSING in die blokkie een ry op en een kolom na regs $\qquad$ stappe
- TEL nou NA ONDER OP in die kolom (die twee waardes onder mekaar).
- Jy MOET 0 in die laaste blokkie kry.
- Die 3 waardes in die onderste ry is die koëffisiënte van die kwadratiese faktor.

Dus, $f(x) = (x + 1)(2x^2 - 4x - 6)$

Jy kan nou die faktorisering voltooi:

$f(x) = (x + 1)(2x + 2)(x - 3)$

Gemengde oefening oor Polinome

1 Faktoriseer die volgende uitdrukkings volledig:

a $27x^3 - 8$

b $5x^3 + 40$

c $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$

d $4x^3 - x^2 - 16x + 4$

e $4x^3 - 2x^2 + 10x - 5$

f $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

g $x^3 - x^2 - 22x + 40$

h $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

i $3x^3 - 7x^2 + 4$

j $x^3 - 19x + 30$

k $x^3 - x^2 - x - 2$

2 Los op vir x:

a $x^3 + 2x^2 - 4x = 0$

b $x^3 - 3x^2 - x + 6 = 0$

c $2x^3 - 12x^2 - x + 6 = 0$

d $2x^3 - x^2 - 8x + 4 = 0$

e $x^3 + x^2 - 2 = 0$

f $x^3 = 16 + 12x$

g $x^3 + 3x^2 = 20x + 60$

3 Toon dat $x - 3$ 'n faktor van $f(x) = x^3 - x^2 - 5x - 3$ is en los dan $f(x) = 0$ op.

4 Toon dat $2x - 1$ 'n faktor van $g(x) = 4x^3 - 8x^2 - x + 2$ is en los dan $g(x) = 0$ op.

Oorsig

Hoofstuk 8 Bladsy 162 Differensiaal-rekene	**Eenheid 1 Bladsy 166**	
	Limiete	• Ondersoek limiete
	Eenheid 2 Bladsy 168	
	Die gradiënt van 'n grafiek by 'n punt	• Funksienotasie en die gemiddelde gradiënt • Die gradiënt van 'n grafiek by 'n punt
	Eenheid 3 Bladsy 172	
	Die afgeleide van 'n funksie	• Eerste beginsels • Differensiasiereëls • Die afgeleide by 'n punt
	Eenheid 4 Bladsy 178	
	Die vergelyking van 'n raaklyn aan 'n grafiek	• Berekening van die vergelyking van 'n raaklyn aan 'n grafiek
	Eenheid 5 Bladsy 180	
	Die grafiek van die derdegraadse funksie	• Stip van 'n derdegraadse funksie
	Eenheid 6 Bladsy 184	
	Die tweede afgeleide (konkawiteit)	• Verandering in konkawiteit
	Eenheid 7 Bladsy 186	
	Toepassings van differensiaalrekene	• Uitbeelding van lewensegte probleme

ONTHOU, JOU STUDIEBENADERING MOET WEES:

1. Werk deur al die voorbeelde in hierdie hoofstuk van jou handboek.
2. Werk deur die aantekeninge in hierdie hoofstuk van die studiegids.
3. Doen die oefeninge aan die einde van die hoofstuk in die handboek.
4. Doen die gemengde oefeninge aan die einde van hierdie hoofstuk in die studiegids.

DIE BEGRIP VAN 'N LIMIET

Notasie: $\lim_{x\to 4} f(x)$

Ons sê: "Die limiet van f wanneer x na 4 neig."

Wat beteken dit?

Die limiet is die y-waarde (onthou $y = f(x)$) neig na (kom nader aan) die funksie as die x-waarde na 'n sekere waarde van links of regs neig.

Voorbeelde: a Laat $f(x) = 2x^2 + 4$

$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 4} 2x^2 + 4$

$= 2(1)^2 + 4 = 6$

b $\lim_{h\to 0} 3(h + 2) = 3(0 + 2) = 6$

Voor jy die limiet bereken, is dit soms nodig om eers te faktoriseer en te VEREENVOUDIG:

'n Voorbeeld hiervan is:

$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x-3}$ Vervanging van $x = 3$ sal nou tot deling deur 0 lei.

$= \lim_{x\to 3} \frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{x-3}}$ Faktoriseer eers die teller en kanselleer uit.

$= \lim\limits_{x\to 3}(x + 3)$

$= (3 + 3)$ Let op dat "lim" wegval in die stap waar jy vervang.

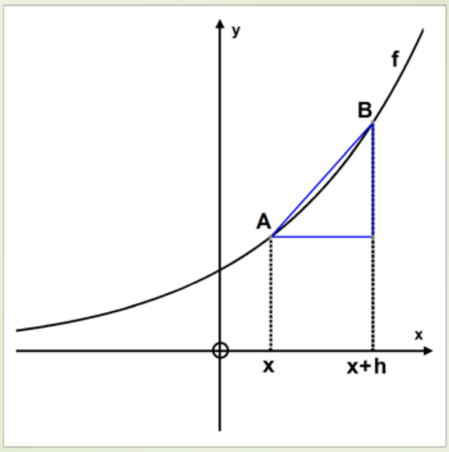
$= 6$

GEMIDDELDE GRADIËNT TUSSEN 2 PUNTE

Uit vorige grade weet jy dat jy die gradiënt tussen twee punte $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ kan bereken deur die formule $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ te gebruik.

In die diagram hieronder word die punte A$(x; f(x))$ en B$(x + h; f(x + h))$ aangedui.

Die GEMIDDELDE GRADIËNT tussen A en B word deur $m_{AB} = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ gegee.



DIE GRADIËNT VAN 'N GRAFIEK BY 'N PUNT

Deur h na 0 te laat neig, word die afstand tussen punt A en B kleiner en kleiner. A en B sal amper "een punt" word.

Die gemiddelde gradiënt word dan die

GRADIËNT VAN DIE GRAFIEK BY 'N PUNT $= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

NOTASIE: Dit word voorgestel deur $f'(x)$.

Dit word ook die **AFGELEIDE** genoem.

Die formule $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ kan gebruik word om enige van die volgende uit **EERSTE BEGINSELS** te bepaal:

Wees op die uitkyk vir die woorde

EERSTE BEGINSELS

- die **afgeleide** van f by enige punt
- die **gradiënt** van die **raaklyn** aan 'n grafiek f by enige punt
- die **gradiënt** van die **funksie** f by enige punt
- die **koers van verandering** van f by enige punt.

$f'(x)$ **kan ook bepaal word deur DIFFERENSIASIEREËLS te gebruik**		
Funksie f	Afgeleide $f'(x)$	Voorbeelde
$\boldsymbol{f(x) = k}$ waar $\boldsymbol{k}$ **'n** konstante is	$f'(x) = 0$	• $f(x) = -5$ $f'(x) = 0$ • $y = 4$ $\frac{dy}{dx} = 0$
$\boldsymbol{f(x) = x^n; x \epsilon R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	• $D_x[x^6] = 6x^5$ • $f(x) = \frac{1}{x^3} = x^{-3}$ $f'(x) = -3x^{-4} = \frac{-3}{x^4}$
$\boldsymbol{f(x) = kx^m; m \in R}$ waar $\boldsymbol{k}$ 'n konstante is	$f'(x) = k \times mx^{m-1}$	• $f(x) = 2x^4$ $f'(x) = 2 \times 4x^{4-1}$ $= 8x^3$ • $D_x\left[\frac{1}{2}x^{\frac{5}{2}}\right] = \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} x^{\frac{5}{2}-1}$ $= \frac{5}{4}x^{\frac{3}{2}}$
Wanneer funksies opgetel/afgetrek word, pas jy die reël afsonderlik op elke funksie toe: $\boldsymbol{D_x[f(x) \pm g(x)] = D_x[f(x)] \pm D_x[g(x)]}$		• $D_x[5x^2 - 4x + 6]$ $= 5 \times 2x - 4 + 0$ $= 10x - 4$

VOOR JY DIE DIFFERENSIASIEREËLS TOEPAS, MOET JY SEKER MAAK DAAR IS:

- Geen hakies nie:

a $f(x) = (x+1)(2x-1) = 2x^2 + x - 1$

$f'(x) = 4x + 1$

- Geen x onder 'n breukstreep nie:

b $f(x) = \frac{3x^2-2}{x} = \frac{3x^2}{x} - \frac{2}{x} = 3x - 2x^{-1}$

$f'(x) = 3 - 2(-1)x^{-2} = 3 + \frac{2}{x^2}$

c $f(x) = \frac{x^2-x-6}{x+2} = \frac{(x-3)(x+2)}{x+2} = x - 3$

$f'(x) = 1$

- Geen x onder 'n wortelteken nie:

d $f(x) = 3\sqrt{x} - 4x = 3x^{\frac{1}{2}} - 4x$

$f'(x) = 3 \times \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} - 4 = \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}} - 4$

Let Wel: LET OP DIE VERSKIL TUSSEN DIE VOLGENDE:

$f(4)$ is die y-**WAARDE** van die funksie by $x = 4$

$f'(4)$ is die **GRADIËNT** van die funksie by $x = 4$

en ook die gradient van die **RAAKLYN** by $x = 4$

DIE DERDEGRAADSE GRAFIEK

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

a dui DIE VORM aan

$a > 0\ (+)$

of

$a < 0(-)$

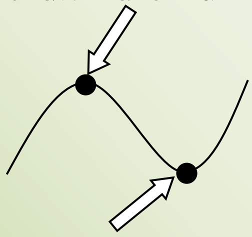
of

STASIONÊRE PUNTE

DRAAIPUNTE

Waar $f'(x) = 0$

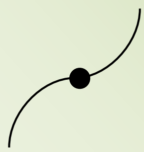
Lokale maksimum



Lokale minimum

BUIGPUNTE

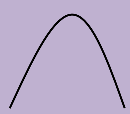
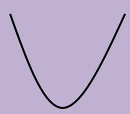
Waar $f''(x) = 0$



Hoe bepaal ek of dit 'n

LOKALE MAKSIMUM of 'n **LOKALE MINIMUM** is?

$f''(x) > 0$ $f''(x) < 0$

Wat sê f' en f'' vir my?			
	Negatief (< 0)	$= 0$	Positief (> 0)
f'	f neem af	f draai	f neem toe
f''	Lokale maksimum Konkaaf ondertoe 	Buigpunt	Lokale minimum Konkaaf boontoe 

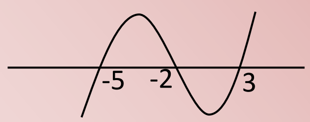
x –AFSNITTE/WORTELS EN VORM

- Vir x –afsnitte: los op vir $f(x) = 0$
- 'n Derdegraadse grafiek kan een, twee of drie x –afsnitte hê.

VOORBEELDE:

a $f(x) = x^3 + 4x^2 - 11x - 30$

$f(3) = (3)^3 + 4(3) - 11(3) - 30 = 0$



$\therefore (x-3)$ is 'n faktor

$f(x) = (x-3)(x^2 + 7x + 10)$

$= (x-3)(x+2)(x+5)$

Die wortels is $-5;\ -2$ en 3.

b $f(x) = x^3 - 3x + 2$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$

$\therefore (x-1)$ is 'n faktor

$f(x) = (x-1)(x^2 + x - 2)$

$f(x) = (x-1)(x-1)(x+2) = (x-1)^2(x+2)$

As **TWEE FAKTORE** dieselfde is, dan is die x –AFSNIT ook 'n DRAAIPUNT.

Die grafiek **BONS** by $x = 1$.

VERGELYKING VAN 'N RAAKLYN AAN 'N GRAFIEK BY 'N SPESIFIEKE PUNT

- Vervang die x –waarde **in $f(x)$** om die koördinate van die RAAKPUNT te bepaal.
- Bepaal $f'(x)$ met behulp van differensiasiereëls.
- Vervang x –waarde in $f'(x)$ om die GRADIËNT van die RAAKLYN m te bepaal.
- Vervang die gradiënt in $y = mx + c$.
- Vervang die draaipunt in $y = mx + c$ om die waarde van c te bepaal.

VOORBEELD

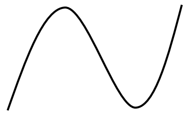
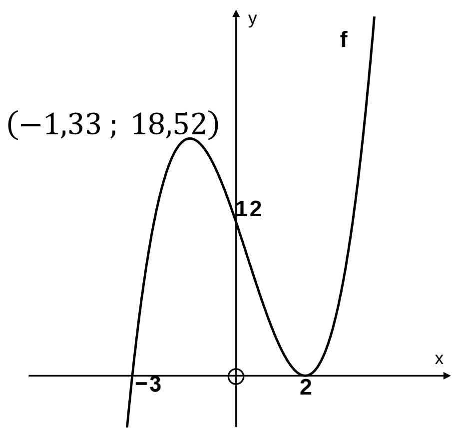
Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan $f(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 3$ by $x = 1$.

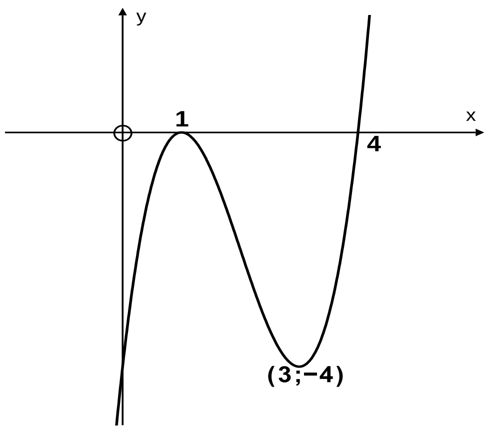
Vervang $x = 1$: $f(1) = 2(1)^3 - 5(1)^2 - 4(1) + 3 = -4$
$\therefore$ Draaipunt is $(1; -4)$

$f'(x) = 6x^2 - 10x - 4$
$f'(1) = 6(1)^2 - 10(1) - 4 = -8$
$\therefore$ Gradiënt van raaklyn by $x = 1$ is -8 ; dus $y = -8x + c$

Vervang $(1; -4)$ in $y = -8x + c$: $-4 = -8(1) + c$
$\therefore c = 4$

Vergelyking van raaklyn is $y = -8x + 4$

SKETS VAN DIE DERDEGRAADSE GRAFIEK VOORBEELD: $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 12$	
BESKRYWING VAN STAP	**STAP OP HIERDIE VOORBEELD TOEGEPAS**
Bepaal vorm (met behulp van a)	$a = 1$ (positief) 
Bepaal y –afsnit **Maak $x = 0$**	$y = (0)^3 - (0)^2 - 8(0) + 12 = 12$
Bepaal x –afsnitte **Los op $f(x) = 0$**	$f(2) = 0$ $\therefore (x - 2)$ is 'n faktor $f(x) = (x - 2)(x^2 + x - 6)$ $f(x) = (x - 2)(x - 2)(x + 3)$ Wortels is -3 en 2. $x = 2$ is ook 'n draaipunt waar die grafiek **bons**
Bepaal draaipunte en hul y –waardes **Los op $f'(x) = 0$** **Vervang x –waardes in $f(x)$**	$f'(x) = 3x^2 - 2x - 8 = 0$ $(3x + 4)(x - 2) = 0$ $x = -\frac{4}{3}$ of $x = 2$ Ons weet reeds uit die vorige stap dat $(2; 0)$ een draaipunt (lokale minimum) is. Laat ons nou die ander draaipunte se y –koördinate bepaal $f(x) = \left(\frac{-4}{3}\right)^3 - \left(\frac{-4}{3}\right)^2 - 8\left(\frac{-4}{3}\right) + 12 = 18{,}52$ Lokale maksimum by $(-1{,}33\ ;\ 18{,}52)$
Maak 'n netjiese tekening	

BEPALING VAN DIE VERGELYKING VAN 'N DERDEGRAADSE GRAFIEK IN DIE VORM $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$	
INLIGTING GEGEE (KAN OP 'N GRAFIEK GETOON WORD OF NIE)	STAPPE
y –afsnit: $y = -8$ **en x –afsnitte: $x = -2; -1$ en 4**	Vanuit die y –afsnit weet ons reeds dat $d = -8$. Maar ons gaan die drie wortels gebruik: $y = a(x+2)(x+1)(x-4)$ Vervang die punt $(0; -8)$: $-8 = a(0+2)(0+1)(0-4)$ $-8 = -8a$ $a = 1$ $\therefore y = 1(x+2)(x+1)(x-4)$ Verwydering van die hakies gee: $y = x^3 - x^2 - 10x - 8$
	Ons is twee wortels (waarvan een ook 'n draaipunt is) en die ander draaipunt gegee. Let Wel: Die grafiek BONS by $x = 1$. Hierdie faktor moet dus gekwadreer word. $y = a(x-1)^2(x-4)$ Vervang die ander draaipunt $(3; -4)$: $-4 = a(3-1)^2(3-4)$ $-4 = -4a$ $a = 1$ $\therefore y = a(x-1)^2(x-4)$ Verwydering van die hakies gee: $y = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$

SPESIALE TOEPASSINGS VAN AFGELEIDES

TEMPO VAN VERANDERING

- Afstand/Verplasing $s(t)$
- Spoed/Snelheid $s'(t)$
- Versnelling $s''(t)$

VOORBEELD

Die verplasing van 'n bewegende voorwerp word beskryf deur die vergelyking $s(t) = 10t - t^2$, waar s verplasing in meter en t tyd in sekondes voorstel.

a Bepaal die verplasing na 2 sekondes.

b Hoe lank sal dit die voorwerp neem om 'n maksimum verplasing te bereik?

c Bepaal die snelheid van die voorwerp na 3 sekondes.

d Bepaal die versnelling van die voorwerp. Beweeg dit vinniger of stadiger?

OPLOSSINGS

a $s(2) = 10(2) - (2)^2 = 16 \text{ m}$

b $s'(t) = 10 - 2t = 0$
$\therefore 10 - 2t = 0$
$\therefore t = 5\ s$

c $s'(3) = 10 - 2(3) = 4 \text{ m.s}^{-1}$

d $s''(t) = -2 \text{ m.s}^{-2}$
Die voorwerp beweeg stadiger omdat die versnelling negatief is.

GEBRUIK VAN DIE EERSTE AFGELEIDE OM MINIMUM OF MAKSIMUM TE BEPAAL

- Vir oppervlakte, $A(x)$, om 'n minimum/maksimum te wees, los $A'(x) = 0$ op
- Vir volume, $V(x)$, om 'n minimum/maksimum te wees, los $V'4(x) = 0$ op
- Vir koste, $C(x)$, om 'n minimum te wees, los $C'(x) = 0$ op
- Vir wins, $P(x)$, om 'n maksimum te wees, los $P'(x) = 0$ op

VOORBEELD

Die volume water in 'n reservoir word gegee deur $V(t) = 60 + 8t - 3t^2$, waar $V(t)$ die volume in duisende liter is en t die aantal dae is wat water in die reservoir gepomp word.

a Bepaal die tempo van verandering van die volume water na 3 dae.

b Wanneer sal die volume water in die reservoir 'n maksimum wees?

c Wat sal die maksimum watervlak in die reservoir wees?

OPLOSSINGS

a $V'(t) = 8 - 6t$

$\therefore V'(3) = 8 - 6(3) = -10$ duisend liter/dag

b $V'(t) = 8 - 6t = 0$

$\therefore 8 - 6t = 0$

$t = \frac{4}{3} = 1{,}3$ dae

c $V\left(\frac{4}{3}\right) = 60 + 8\left(\frac{4}{3}\right) - 3\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 58{,}67$ duisend liter

Gemengde oefening oor Differensiaalrekene

1 Bepaal f' uit eerste beginsels as:

a $f(x) = 1 - x^2$

b $f(x) = -3x^2$

2 Bepaal:

a $\frac{dy}{dx}$ as $y = \sqrt{x} - \frac{1}{2x^2}$

b $D_x\left[\frac{2x^2-x-15}{x-3}\right]$

3 Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die kromme $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 32x + 15$ by die punt $x = -2$.

4 Skets die grafiek met die volgende eienskappe en dui al die kernpunte op die grafiek aan:

$f'(x) < 0$ wanneer $1 < x < 5$

$f'(x) > 0$ wanneer $x < 1$ en $x > 5$

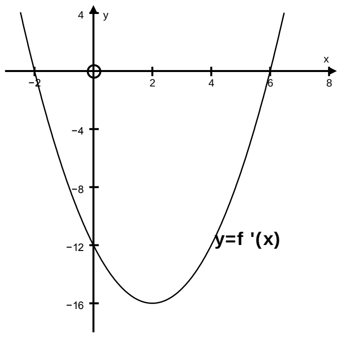
$f'(5) = 0$ en $f'(1) = 0$

$f(0) = -6$ en $f(3) = 0$

$f''(3) = 0$

5 $(2; 9)$ is 'n draaipunt van die grafiek $f(x) = ax^3 + 5x^2 + 4x + b$. Bepaal die waardes van a en b in die vergelyking van f.

6 Die diagram hieronder stel die grafiek van $y = f'(x)$, die afgeleide van f, Voor.



a Skryf die x-waardes van die draaipunt van f neer.

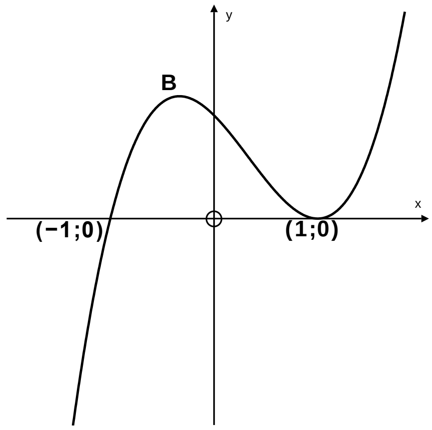
b Skryf die x-waarde van die buigpunt van f neer.

c Vir watter waardes van x sal $f(x)$ afneem?

7 Die grafiek van $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ verskyn hieronder. Die kromme het draaipunte by B en $(1; 0)$. Die punte $(-1; 0)$ en $(1; 0)$ is x-afsnitte.

a Toon aan dat $a = -1$; $b = -1$ en $c = 1$.

b Bepaal die koördinate van B.



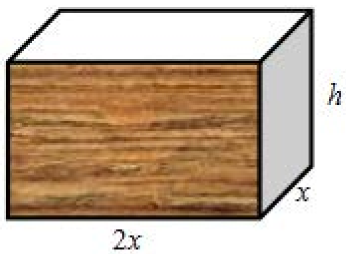
8 Die afstand in meter gedek deur ’n voorwerp word as $s(t) = t^3 - 2t^2 + 3t + 5$ gegee. Bepaal:

a ’n uitdrukking vir die spoed van die voorwerp op enige tyd t

b die tyd wat die spoed van die voorwerp ’n minimum is

c die tyd wat die versnelling van die voorwerp 8 $m.s^{-2}$ sal wees.

9 Die skets hieronder toon ’n reghoekige boks met basis ABCD.
AB = $2x$ meter en BC = x meter. Die volume van die boks is 24 kubieke meter.
Materiaal om die boonste deel (PQRS) van die boks, x, oor te trek, kos R25 per vierkante meter.
Materiaal om die basis ABCD en die vier sye oor te trek, kos R20 per vierkante meter.



a Toon dat die hoogte (h) van die boks gegee word deur $h = 12x^{-2}$.

b Toon dat die totale koste (C) in rand gegee word deur
$C(x) = 90x^2 + 1440x^{-1}$.

c Bepaal die waarde van x waarvoor die koste ’n minimum sal wees.

Analitiese meetkunde

Oorsig

Hoofstuk 9 Bladsy 194 Analitiese meetkunde	**Eenheid 1 Bladsy 196**	
	Vergelyking van 'n sirkel met middelpunt by die oorsprong	• Bepaling van die vergelyking van 'n sirkel • Simmetriese punte op 'n sirkel
	Eenheid 2 Bladsy 200	
	Vergelyking van 'n sirkel weg van die oorsprong gesentreer	• Bepaling van die vergelyking van 'n sirkel met enige gegewe middelpunt • Algemene vorm
	Eenheid 3 Bladsy 206	
	Die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel	• Lyne op sirkels • Vergelyking van 'n raaklyn

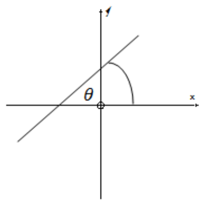
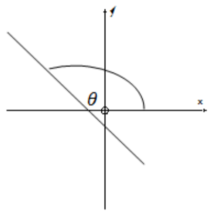
ONTHOU, JOU STUDIEBENADERING MOET WEES:

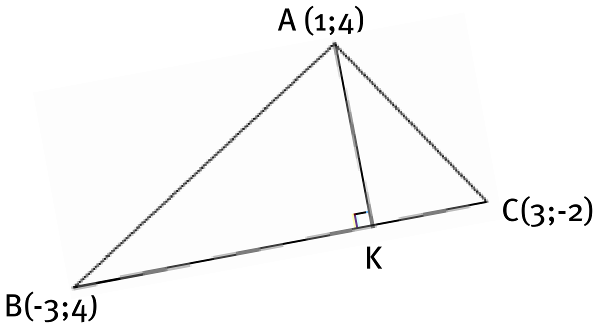
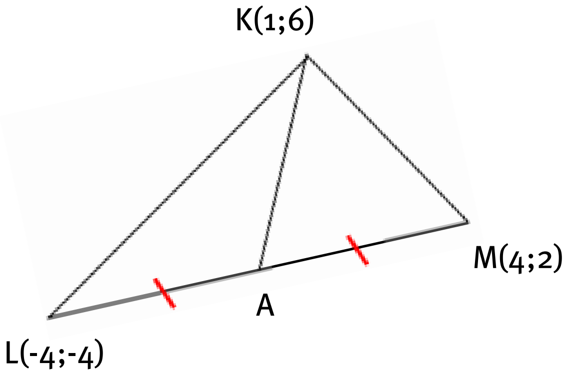
1. Werk deur al die voorbeelde in hierdie hoofstuk van jou handboek.
2. Werk deur die aantekeninge in hierdie hoofstuk van die studiegids.
3. Doen die oefeninge aan die einde van die hoofstuk in die handboek.
4. Doen die gemengde oefeninge aan die einde van hierdie hoofstuk in die studiegids.

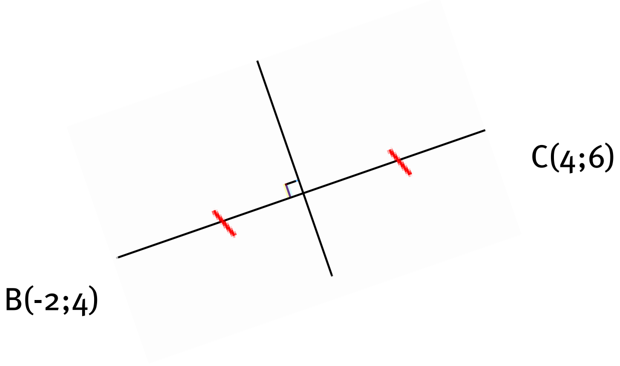
Jy kan net Wiskunde LEER as jy Wiskunde DOEN!

Hoofstuk 9
Analitiese meetkunde

HERSIENING VAN BEGRIPPE UIT VORIGE GRADE

BEGRIP	FORMULE / METODE
Afstand tussen twee punte $A(x_1;y_1)$ en $B(x_2;y_2)$	$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$
Koördinate van middelpunt	$\left(\frac{x_1+x_2}{2};\frac{y_1+y_2}{2}\right)$
Gemiddelde gradiënt tussen twee punte $A(x_1;y_1)$ en $B(x_2;y_2)$ **Gradiënt van 'n reguitlyn deur A en B**	$m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ Of wanneer die hellingshoek, θ, gegee word, gebruik $m=tan\theta$
Vergelyking van 'n reguitlyn	$y=mx+c$ Of $y-y_1=m(x-x_1)$
Hellingshoek, θ **Let Wel: Hoek tussen lyn en** POSITIEWE **x –as**	$m=tan\theta$  As $m>0(+)$, dan θ is 'n skerphoek (kleiner as 90°)  As $m<0(-)$, dan θ is 'n stomphoek (groter as 90°)
Om te bewys dat punte A, B en C kollineêr is (d.w.s. in 'n reguitlyn gerangskik)	Bewys dat $m_{AB}=m_{BC}$ Of $m_{AB}=m_{AC}$ Of $m_{AC}=m_{BC}$
Ewewydige lyne	Twee lyne $y=m_1x+c_1$ en $y=m_2x+c_2$ is ewewydig as $m_1=m_2$
Loodlyne	Twee lyne $y=m_1x+c_1$ en $y=m_2x+c_2$ is loodreg as $m_1\times m_2=-1$

ANDER DEFINISIES/BEGRIPPE WAT JY MOET KEN	
DEFINISIE	**VOORBEELDE**
Hoogtelyn van 'n driehoek = die lyn van een hoekpunt loodreg op die teenoorstaande sy	 Om die vergelyking van hoogtelyn AK te bepaal: • Bepaal die gradiënt van BC. • Bepaal die gradiënt van AK. • Bepaal die vergelyking van AK (vervang A). $m_{BC} = \frac{-2-4}{3-(-3)} = -1$ Maar BC$\perp$AK, dus $m_{AK} = 1$ Vervang punt A(1;4): $y-4=-1(x-1)$ Vergelyking van AK: $y=-x+5$
Swaartelyn (mediaan) = die lyn wat die hoekpunt van die driehoek met die middelpunt van die teenoorstaande sy verbind	 Om die vergelyking van swaartelyn KA te bepaal: • Bepaal die koördinate van middelpunt A. • Bepaal die gradiënt van KA. • Bepaal die vergelyking van KA. $A\left(\frac{-4+4}{2};\frac{-4+2}{2}\right)$ $A(0;-1)$

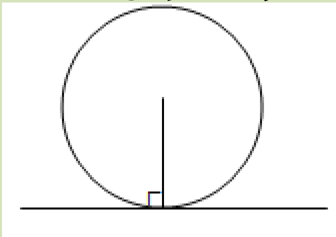
	$m_{KA} = \dfrac{6-(-1)}{1-0} = 7$ $y - 6 = 7(x-1)$ $y = 7x - 1$
Middelloodlyn = die lyn deur die middelpunt van ŉ lyn en loodreg op daardie lyn	 Om die vergelyking van middelloodlyn van BC te bepaal: • Bepaal die gradiënt van BC. • Bepaal die gradiënt van die halveerlyn. • Bepaal vergelyking van halveerlyn. $m_{BC} = \dfrac{6-4}{4-(-2)} = \dfrac{1}{3}$ Produk van gradiënte moet -1 wees: $m_{middelloodlyn} = -3$ $y - 6 = -3(x-4)$ $y = -3x + 18$

DIE SIRKEL : $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
(middelpunt-radius-vorm)

SAMEVATTING VAN SIRKELS	
Vergelyking van sirkel met radius r en middelpunt by die oorsprong	$x^2+y^2=r^2$
Vergelyking van sirkel met radius r en middelpunt $(a; b)$	$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$
Om radius en middelpunt van sirkel te bepaal wanneer vergelyking gegee word	Voorbeeld A: Bepaal die radius en middelpunt van die sirkel met vergelyking $(x+1)^2+(y-3)^2=16$ $(x+1)^2+(y-3)^2=16$ kan geskryf word as $(x-(-1))^2+(y-(3))^2=16$ Middelpunt: $(-1; 3)$ Radius = $\sqrt{16}=4$ Voorbeeld B: Bepaal die radius en middelpunt van die sirkel met vergelyking $x^2+y^2+4x+6y-10=0$ Ons gaan **VOLTOOIING VAN DIE VIERKANT** gebruik • Konstante term na RK; groepeer x- en y-terme $x^2+4x+\cdots+y^2+6y+\cdots=10$ • Voltooi vierkant vir x en y -- tel $\left(\frac{1}{2}\times koëffisiënt\right)^2$ by $x^2+4x+4+y^2+6y+9=10+4+9$ • Skryf in middelpunt-radius-vorm $(x+2)^2+(y+3)^2=23$ Middelpunt: $(-2; -3)$ Radius = $\sqrt{23}$

Vergelyking van raaklyn aan sirkel by 'n gegewe punt

Let Wel: Radius is loodreg op raaklyn



Bepaal die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2+(\boldsymbol{y}-\mathbf{3})^2=\mathbf{16}$ deur die punt $(\mathbf{2};\mathbf{5})$.

Die stappe is:

- Bepaal middelpunt van sirkel.
- Bepaal gradiënt van RADIUS.
- Bepaal gradiënt van RAAKLYN:
  Onthou: $\boldsymbol{m_{radius}}\times\boldsymbol{m_{raaklyn}}=-\mathbf{1}$
- Bepaal vergelyking van raaklyn deur raakpunt te vervang.

Die middelpunt van sirkel $(\boldsymbol{x}+\mathbf{1})^2+(\boldsymbol{y}-\mathbf{3})^2=\mathbf{16}$ is $(-\mathbf{2};\mathbf{3})$.

Radius verbind met middelpunt $(-\mathbf{1};\mathbf{3})$ met raakpunt $(\mathbf{2};\mathbf{5})$.

$$\boldsymbol{m_{radius}}=\frac{\mathbf{5}-\mathbf{3}}{\mathbf{2}-(-\mathbf{2})}=\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{4}}=\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{m_{raaklyn}}=-\mathbf{2}$$

Vergelyking van raaklyn: $\boldsymbol{y}-\mathbf{5}=-\mathbf{2}(\boldsymbol{x}-\mathbf{2})$

$$\boldsymbol{y}=-\mathbf{2}\boldsymbol{x}+\mathbf{9}$$

Gemengde oefening oor Analitiese meetkunde

1 A $(-2;1)$, B$(p;-4)$, C$(5;0)$ en D $(3;2)$ is die hoekpunte van trapesium ABCD in 'n Cartesiese vlak met $AB \parallel CD$.

a Toon aan dat $p = 3$.

b Bereken AB:CD in die eenvoudigste vorm.

c As N $(x;y)$ op AB is en NBCD is 'n parallelogram, bepaal die koördinate van N.

d Bepaal die vergelyking van die lyn wat deur B en D gaan.

e Wat is die hellingshoek van lyn BD?

f Bereken die oppervlakte van parallelogram NBCD.

g R $(-1;\ q)$, A en C is kollineêr. Bereken die waarde van q.

2 $x^2 + 4x + y^2 + 2y - 8 = 0$ is die vergelyking van 'n sirkel met middelpunt M in 'n Cartesiese vlak.

a Bewys dat die sirkel deur die punt N$(1; -3)$ gaan.

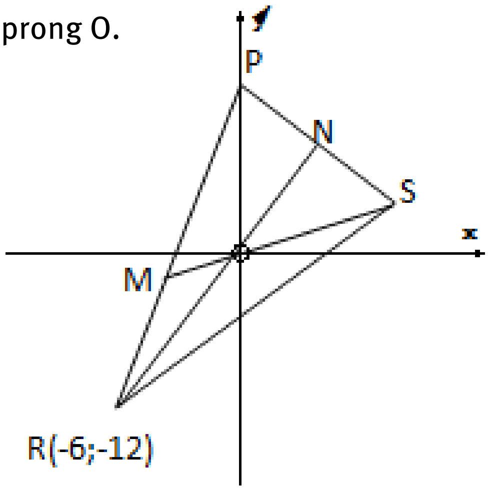
b Bepaal die vergelyking van PN, die raaklyn aan die sirkel by N.

c Bereken θ, die hellingshoek van die raaklyn, afgerond tot een desimale plek.

d Bepaal die koördinate van die punt waar die raaklyn in 2b die x-as sny.

e Bereken die koördinate van die punt(e) waar die sirkel met middelpunt M die y-as sny.

3 In die diagram is P, R en S hoekpunte van ΔPRS. P is 'n punt op die y-as. Die koördinate van R is (-6; -12). Die vergelyking van PR is $3x - y + 6 = 0$. Die swaartelyn SM en die hoogtelyn RN sny by die oorsprong O.



a Bereken die gradiënt van RO.

b Bereken die gradiënt van PS.

c Bepaal die vergelyking van PS.

d Bereken die helling van PS afgerond tot een desimale plek.

e As die koördinate van N $\left(2n;\ 3\frac{3}{5} + n\right)$ is, bepaal die waarde van n.

f Bereken die koördinate van S.

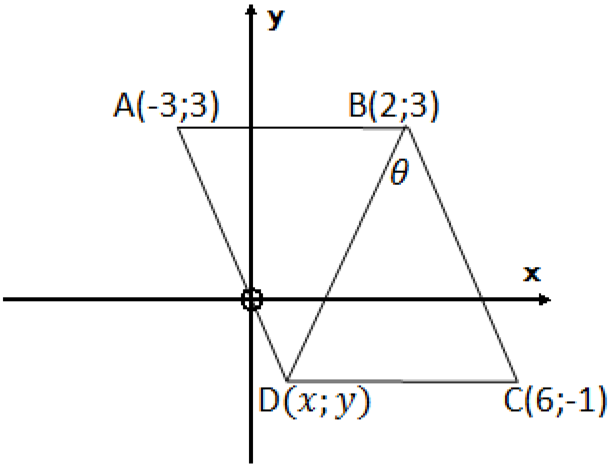
4 Die vergelyking van 'n sirkel is $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$.

a Bepaal die koördinate van M, die middelpunt van die sirkel, asook die lengte van die radius.

b Bereken die waarde van p as N$(p;\ 1)$ met $p > 0$ 'n punt op die sirkel is.

c Skryf die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel by N neer.

5 A (-3; 3), B(2; 3), C(6; -1) en D$(x;\ y)$ is die hoekpunte van vierhoek ABCD in 'n Cartesiese vlak.



a Bepaal die vergelyking AD.

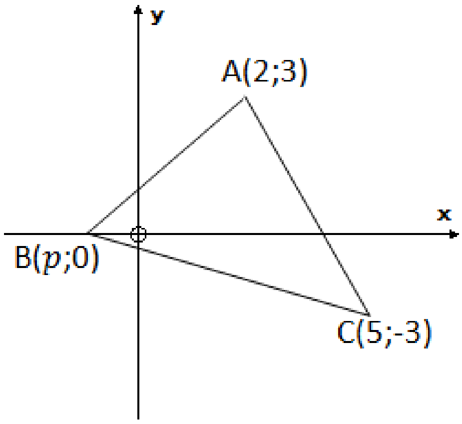
b Bewys dat die koördinate van D $\left(\frac{3}{2}; -\frac{3}{2}\right)$ is as D ewe ver van B en C is.

c Bepaal die vergelyking van BD.

d Bepaal die grootte van θ, die hoek tussen BD en BC, afgerond tot een desimale plek.

e Bereken die oppervlakte van $\triangle BDC$ afgerond tot die naaste vierkante eenheid.

6 In die diagram is punte A(2; 3), B$(p; 0)$ en C(5; -3) die hoekpunte van $\triangle ABC$ in 'n Cartesiese vlak. AC sny die x-as by D.



a Bereken die koördinate van D.

b Bereken die waarde van p as BC = AC en $p < 0$.

c Bepaal die hellingshoek van reguitlyn AC, afgerond tot een desimale syfer.

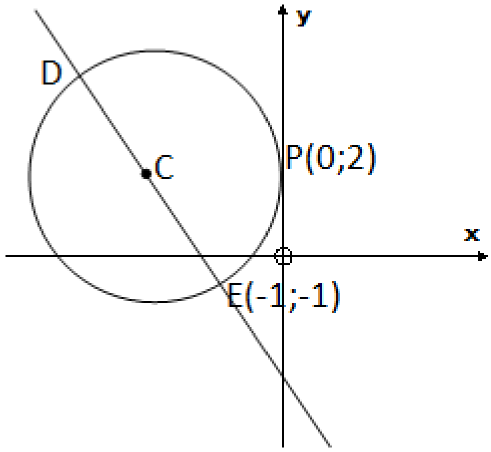
d As $p = -1$, bereken die grootte van $\hat{A}$, afgerond tot een desimale syfer.

7 In die Cartesiese vlak word die vergelyking van 'n sirkel met middelpunt M gegee deur:

$$x^2 + y^2 + 6y - 7 = 0$$

Bepaal, deur berekening, of die reguitlyn $y = x + 1$ 'n raaklyn aan die sirkel is of nie.

8 In die diagram lê middelpunt C van die sirkel op die reguitlyn $3x + 4y + 7 = 0$. Die reguitlyn sny die sirkel by D en E$(-1; -1)$. Die sirkel raak aan die y-as by P$(0;\ 2)$.



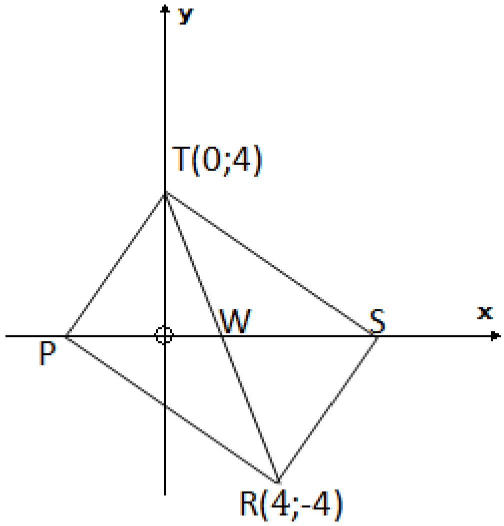
a Bepaal die vergelyking van die sirkel in die vorm: $(x - n)^2 + (y - q)^2 = r^2$.

b Bepaal die lengte van middellyn DE.

c Bepaal die vergelyking van die middelloodlyn van PE.

d Toon aan dat die middelloodlyn van PE en reguitlyn DE by C sny.

9 In die diagram is P, R$(4; -4)$, S en T (0; 4) die hoekpunte van 'n reghoek. P en S lê op die x – as. Die hoeklyne sny by W.



a Toon aan dat die koördinate van S $(2 + 2\sqrt{5}; 0)$ is.

b Bepaal die gradiënt van TS afgerond tot twee desimale plekke.

c Bereken $R\hat{T}S$ afgerond tot twee desimale plekke.

10

a Toon aan dat die vergelyking van die raaklyn aan die sirkel $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$ by die punt (5; -2) $y = -3x + 13$ is.

b As T$(x;\ y)$ 'n punt op die raaklyn in 10.a is sodat sy afstand van die middelpunt van die sirkel $\sqrt{20}$ eenhede is, bepaal die waardes van x en y.

Hoofstuk 10

Euklidiese meetkunde

Oorsig

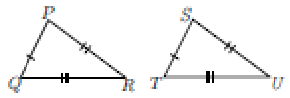
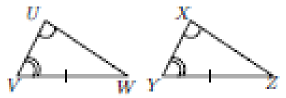
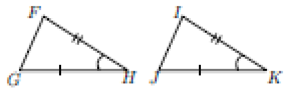
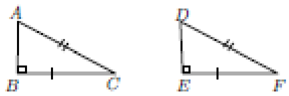
Hoofstuk 10 Bladsy 224 Euklidiese meetkunde	**Eenheid 1 Bladsy 232**	
	Eweredigheid in driehoeke	• Verhouding • Stelling 1
	Eenheid 2 Bladsy 238	
	Gelykvormigheid in driehoeke	• Stelling 2 • Stelling 3
	Eenheid 3 Bladsy 244	
	Stelling van Pythagoras	• Bewys van Stelling van Pythagoras

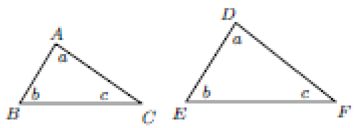
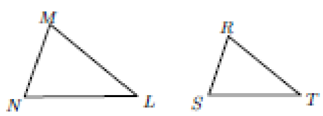
ONTHOU, JOU STUDIEBENADERING MOET WEES:

1. Werk deur al die voorbeelde in hierdie hoofstuk van jou handboek.
2. Werk deur die aantekeninge in hierdie hoofstuk van die studiegids.
3. Doen die oefeninge aan die einde van die hoofstuk in die handboek.
4. Doen die gemengde oefeninge aan die einde van hierdie hoofstuk in die studiegids.

Jy kan net Wiskunde LEER as jy Wiskunde DOEN!

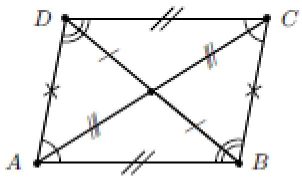
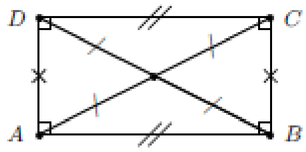
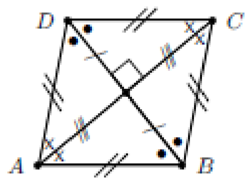
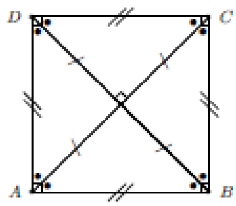
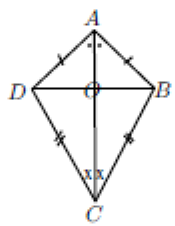
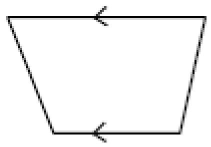
HERSIENING VAN MEETKUNDE UIT VORIGE JARE

KONGRUENSIE	
SSS	 $\Delta PQR \equiv \Delta STU$
HHS	 $\Delta UVW \equiv \Delta XYZ$
SHS (ingeslote hoek)	 $\Delta FGH \equiv \Delta IJK$
RHS	 $\Delta ABC \equiv \Delta DEF$

GELYKVORMIGHEID	
HHH	 $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F}$ $\therefore \Delta ABC \mathbin{\vert\vert\vert} \Delta DEF$
SSS	 $\frac{MN}{RS} = \frac{ML}{RT} = \frac{NL}{ST}$ $\therefore \Delta MNL \mathbin{\vert\vert\vert} \Delta RST$

Hoofstuk 10

Euklidiese meetkunde

EIENSKAPPE VAN SPESIALE VIERHOEKE	
PARALLELOGRAM • Albei paar teenoorstaande sye is ewewydig. • Albei paar teenoorstaande sy is gelyk. • Albei paar teenoorstaande hoeke is gelyk. • Hoeklyne halveer mekaar.	
REGHOEK Alle eienskappe van 'n **parallelogram**. Plus: • Albei hoeklyne is ewe lank. • Alle binnehoeke is gelyk aan 90°.	
RUIT Alle eienskappe van 'n **parallelogram**. Plus: • Alle **sye** is **gelyk**. • Hoeklyne halveer mekaar **loodreg**. • Hoeklyne **halveer** binnehoek**e.**	
VIERKANT Alle eienskappe van 'n **ruit**. Plus: • Alle binnehoeke is 90°. • Hoeklyne is ewe lank.	
VLIEËR • Twee paar aangrensende sye is gelyk. • Hoeklyn tussen gelyke sye halveer ander hoeklyn. • Een paar teenoorstaande hoeke is gelyk (ongelyke sye). • Hoeklyn tussen gelyke sye halveer binnehoeke (is simmetrie-as). • Hoeklyne sny loodreg.	
TRAPESIUM • Een paar teenoorstaande sye is ewewydig.	

HOE OM TE BEWYS DAT ’N VIERHOEK ’N PARALLELOGRAM IS

Bewys enige EEN van die volgende (meestal deur kongruensie):

- Bewys dat albei paar teenoorstaande **sye ewewydig** is.
- Bewys dat albei paar teenoorstaande **sye gelyk** is.
- Bewys dat albei paar teenoorstaande **hoeke gelyk** is.
- Bewys dat die **hoeklyne** mekaar **halveer**.
- Bewys dat **EEN paar** sye **gelyk en ewewydig** is.

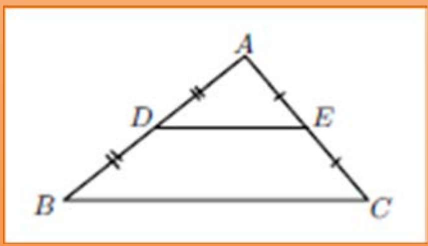
HOE OM TE BEWYS DAT ’N PARALLLELOGRAM ’N RUIT IS

Bewys EEN van die volgende:

- Bewys dat die hoeklyne mekaar **loodreg** halveer.
- Bewys dat enige twee **aangrensende sye ewe lank** is.

MIDDELPUNTSTELLING

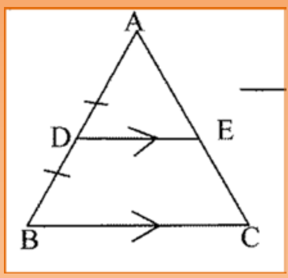
Die lynsegment wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, is ewewydig aan die 3de sy van die driehoek en die helfte van die lengte van daardie sy.



As AD = DB en AE = EC, dan DE ∥ BC en DE = $\frac{1}{2}$BC

OMGEKEERDE VAN MIDDELPUNTSTELLING

As 'n lyn vanaf die middelpunt van een sy van 'n driehoek ewewydig aan 'n ander sy getrek word, sal daardie lyn die 3de sy halveer en die helfte wees van die lengte van die sy waaraan dit ewewydig is.



As AD = DB en DE ∥ BC, dan AE = EC en DE = $\frac{1}{2}$BC.

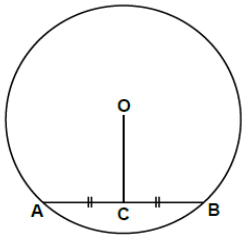
Hoofstuk 10

Euklidiese meetkunde

HERSIENING VAN SIRKELMEETKUNDE (UIT GRAAD 11)

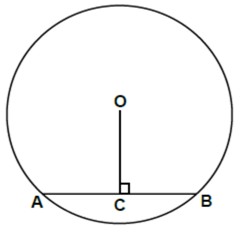
Stelling 1

As AC = CB in sirkel O, dan OC ⊥ AB.



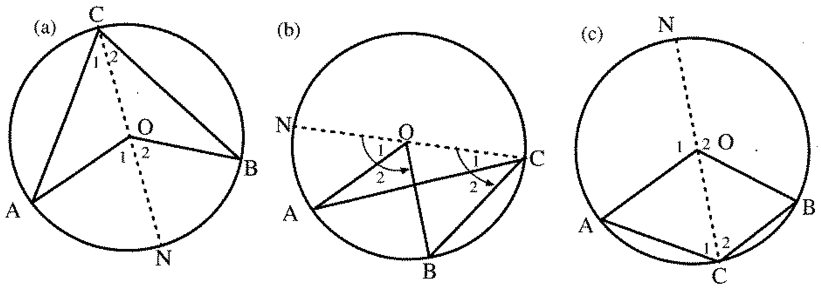
Omgekeerde van Stelling 1

As OC ⊥ koord AB, dan AC = BC.



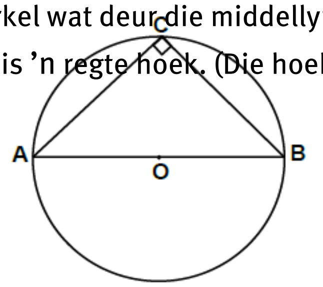
Stelling 2

’n Hoek by die middelpunt van ’n sirkel is dubbel die grootte van die hoek op die omtrek van die sirkel wat deur dieselfde koord of boog onderspan word. $\mathrm{A\hat{O}B} = 2 \times \mathrm{A\hat{C}B}$



Stelling 3

Die hoek op ’n sirkel wat deur die middellyn onderspan word, is ’n regte hoek. (Die hoek in ’n halfsirkel is $90°$)

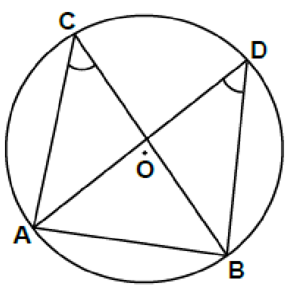


Omgekeerde van Stelling 3

As $\hat{C} = 90°$, dan is AB die middellyn van die sirkel.

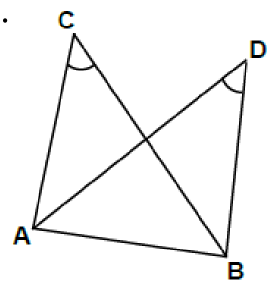
Stelling 4

Die hoeke op die omtrek van ’n sirkel wat deur dieselfde boog of koord onderspan word, is gelyk.



Omgekeerde van Stelling 4

As ’n lynsegment gelyke hoeke by twee ander punte onderspan, lê hierdie vier punte op die omtrek van ’n sirkel.

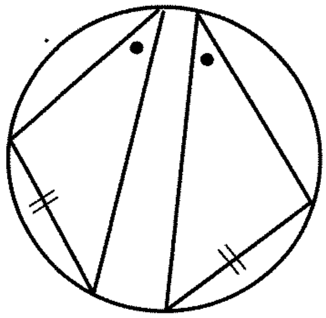


Hoofstuk 10

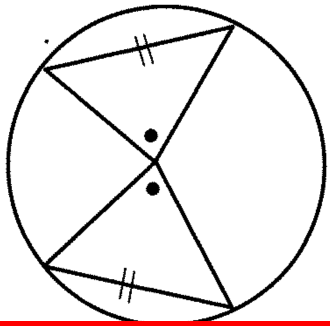
Euklidiese meetkunde

<u>Gevolgtrekkings uit Stelling 4</u>

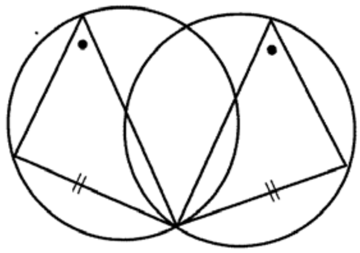
Gelyke koorde onderspan gelyke hoeke op die omtrek van ʼn sirkel.



Gelyke koorde onderspan gelyke hoeke by die middelpunt van ʼn sirkel.



Gelyke koorde van gelyke sirkels onderspan gelyke hoeke op die omtrek van ʼn sirkel

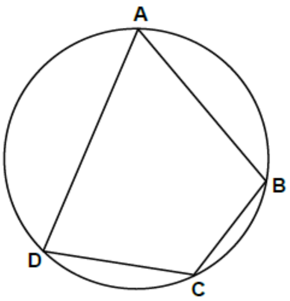


<u>Stelling 5</u>

Die teenoorstaande hoeke van ʼn koordevierhoek is supplementêr.

$\hat{A} + \hat{C} = 180°$

$\hat{B} + \hat{D} = 180°$

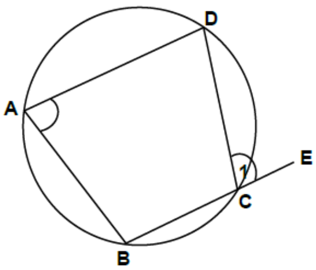


<u>Omgekeerde van Stelling 5</u>

As die teenoorstaande hoeke van ʼn vierhoek supplementêr is, is dit ʼn koordevierhoek.

<u>Stelling 6</u>

Die buitehoek van ʼn koordevierhoek is gelyk aan die teenoorstaande binnehoek.

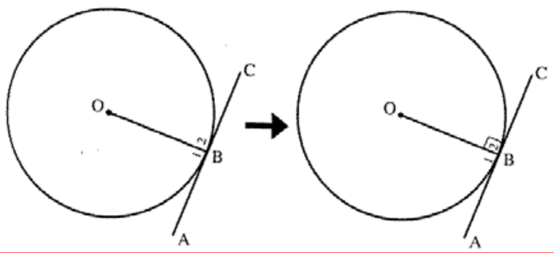


<u>Omgekeerde van Stelling 6</u>

As die buitehoek van ʼn vierhoek gelyk aan die teenoorstaande binnehoek is, is dit ʼn koordevierhoek.

<u>Stelling 7</u>

Die raaklyn aan ʼn sirkel is loodreg op die radius by die raakpunt met die sirkel.

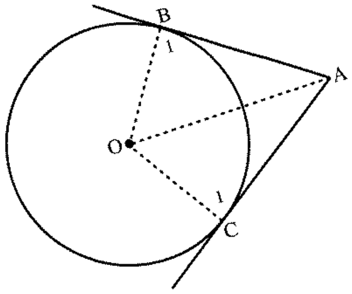


<u>Omgekeerde van Stelling 7</u>

As ʼn lyn loodreg op die radius getrek word deur die punt waar die radius die sirkel ontmoet, is hierdie lyn ʼn raaklyn aan die sirkel.

Stelling 8

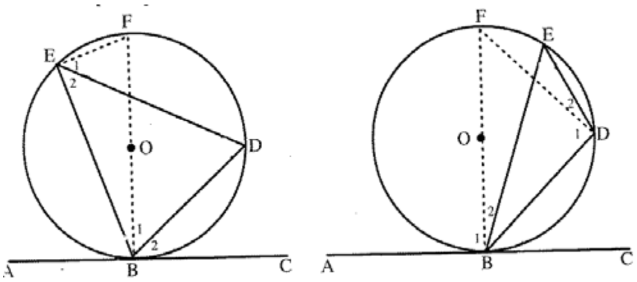
Twee raaklyne wat vanaf dieselfde punt buite ’n sirkel getrek word, is ewe lank.



Stelling 9 (Raaklyn-koord-stelling)

Die hoek tussen die raaklyn aan ’n sirkel en ’n koord wat vanaf die raakpunt getrek word, is gelyk aan die hoek in die teenoorstaande sirkelsegment.

Skerphoek Stomphoek



Omgekeerde van Stelling 9

As ’n lyn deur die eindpunt van ’n koord getrek word en ’n hoek vorm wat gelyk aan die hoek in die teenoorstaande segment is, is daardie lyn ’n raaklyn.

DRIE MANIERE OM TE BEWYS DAT ’N VIERHOEK ’N KOORDEVIERHOEK IS

Bewys dat:

- een paar teenoorstaande hoeke supplementêr is
- die buitehoek gelyk aan die teenoorstaande binnehoek is
- twee hoeke wat by twee ander hoekpunte van die vierhoek deur ’n lynsegment onderspan word, gelyk is.

Voorbeeld 1

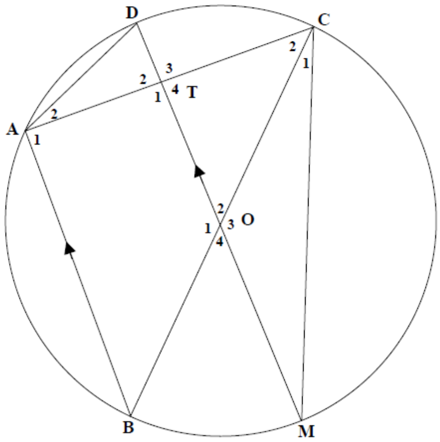
In die diagram regs is O die middelpunt van sirkel DABMC.

BC en DM is middellyne.

AC en DM sny by T.

OT = 3DT

AB∥DM



a Bewys dat T die middelpunt van AC is.

b Bepaal die lengte van MC in terme van DT.

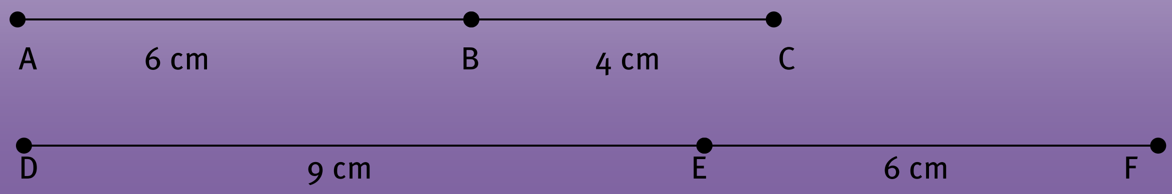
c Druk $\widehat{D}$ in terme van $\hat{O}_2$ uit.

Oplossing:

a $\hat{A}_1 = 90°$ ∠ in half⊙

$\hat{T}_1 = 90°$ binne∠'e supplementêr

HERSIENING VAN DIE BEGRIP EWEREDIGHEID



AB : BC = 6 : 4 = **3 : 2**

DE : EF = 9 : 6 = **3 : 2**

Al is AB : BC = DE : EF, beteken dit **NIE** dat AB = DE, AC = DF of BC = EF **nie**.

GRAAD 12-MEETKUNDE

<u>Stelling 1</u>

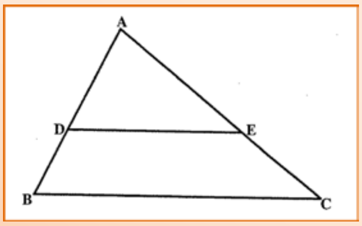
'n Lyn wat ewewydig aan een sy van 'n driehoek is en die ander twee sye sny, sal die ander twee sye eweredig verdeel.

As DE ∥ BC, dan $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$
of AD : DB = AE : EC

<u>Omgekeerde van Stelling 1</u>

As 'n lyn twee sye van 'n driehoek eweredig verdeel, is die lyn ewewydig aan die derde sy van die driehoek.

As $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, dan DE ∥ BC.



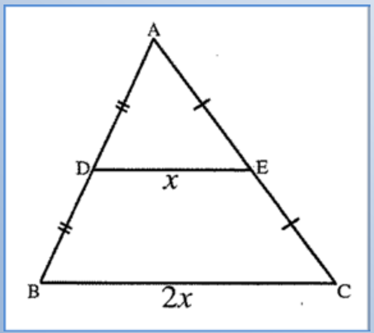
<u>Stelling 2 (Middelpuntstelling)</u>

(Spesiale geval van Stelling 1)

Die lynsegment wat die middelpunte van twee sye van 'n driehoek verbind, is ewewydig aan die 3^de^ sy van die driehoek en die helfte daardie lyn

van die lengte van daardie sy.

As AD = DB en AE = EC, dan DE ∥ BC en DE = $\frac{1}{2}$BC.

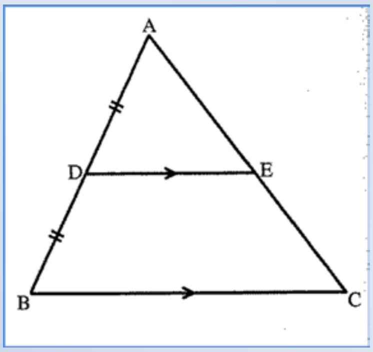


<u>Omgekeerde van Stelling 2</u>

As 'n lyn vanaf die middelpunt van een sy van 'n driehoek en ewewydig aan 'n 'n ander sy getrek word, sal

die 3^de^ sy halveer en die helfte wees van die lengte van die sy waaraan dit ewewydig is.

As AD = DB en DE ∥ BC, dan AE = EC en DE = $\frac{1}{2}$BC.



<u>Stelling 3</u>

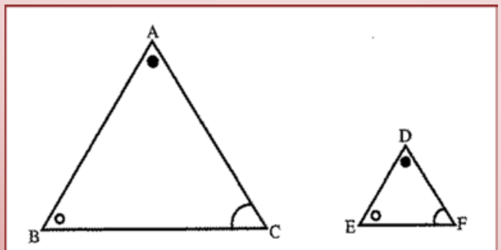
Die ooreenkomstige sye van twee gelykhoekige driehoeke is eweredig.

As $\Delta ABC\ |||\ \Delta DEF$, dan $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$

<u>Omgekeerde van Stelling 3</u>

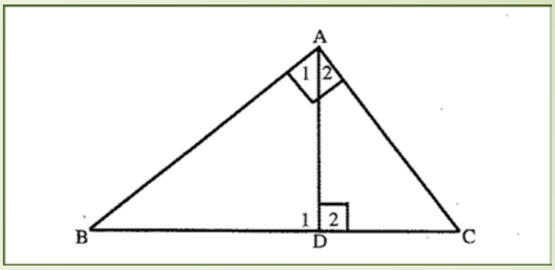
As die sye van twee driehoeke eweredig is, dan is die driehoeke gelykhoekig.

As $\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$, dan $\Delta ABC\ |||\Delta DEF$



Stelling 4

Die loodlyn wat vanaf die hoekpunt van die regte hoek van 'n reghoekige driehoek getrek word, verdeel die driehoek in twee driehoeke wat gelykvormig aan mekaar en gelykvormig aan die oorspronklike driehoek is.



Gevolgtrekkings uit Stelling 4

$\Delta ABC|||\Delta DBA$

$\therefore \frac{AB}{DB} = \frac{BC}{BA} = \frac{AC}{DA}$

$\therefore AB^2 = BD.BC$

$\Delta ABC|||\Delta DAC$

$\therefore \frac{AB}{DA} = \frac{BC}{AC} = \frac{AC}{DC}$

$\therefore AC^2 = CD.CB$

$\Delta DBA|||\Delta DAC$

$\therefore \frac{DB}{DA} = \frac{BA}{AC} = \frac{DA}{DC}$

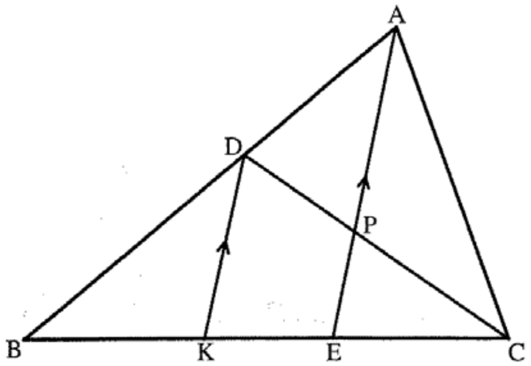
$\therefore AD^2 = BD.DC$

Stelling 5 (Die Stelling van Pythagoras)

Using die gevolgtrekkings uit Stelling 4, dit kan be proven dat:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2$$

Voorbeeld



Gegee: $AD:DB = 2:3$ en $BE = \frac{4}{3}EC$.

Instruksie: Bepaal die verhouding van $CP:PD$.

Oplossing:

In ΔABE $\quad \frac{BE}{KE} = \frac{5}{2} \quad \therefore BE = \frac{5}{2}KE$

Maar dit is gegee dat $BE = \frac{4}{3}EC$

$\therefore \frac{4}{3}EC = \frac{5}{2}KE$

$\frac{EC}{KE} = \frac{5}{2} \div \frac{4}{3} = \frac{15}{8}$

In ΔCDK $\quad \frac{CP}{PD} = \frac{CE}{EK} = \frac{15}{8}$

$\therefore CP:PD = 15:8$

WENKE OM ’N MEETKUNDEPROBLEEM OP TE LOS

- **LEES, LEES, LEES** die inligting langs die diagram aandagtig.
- DRA alle gegewe inligting op die **DIAGRAM** OOR.
- Soek **SLEUTELWOORDE**, bv.

  RAAKLYN: Wat sê die stellings oor raaklyne?

  KOORDEVIERHOEK: Wat is die eienskappe van ’n koordevierhoek?
- Stel vir jouself **“SEKONDÊRE” DOELWITTE**, bv.
  - As jy wil bewys dat twee sye van driehoek gelyk is (primêre doel), bewys eers dat daar twee gelyke hoeke is (sekondêre doel)
  - As jy wil bewys dat ’n lyn ’n raaklyn is, kan die sekondêre doel wees om te bewys dat die lyn loodreg op ’n radius is.
- Vir vrae soos: Bewys dat $\hat{A}_1 = \hat{C}_2$. Begin met EEN DEEL. Beweeg **stap vir stap** na die ANDER DEEL en gee redes.

  Bv. $\boldsymbol{\hat{A}_1} = \hat{A}_2$; $\hat{A}_2 = \hat{C}_1$; $\hat{C}_1 = \boldsymbol{\hat{C}_2}$; $\therefore \boldsymbol{\hat{A}_1} = \boldsymbol{\hat{C}_2}$

Gemengde oefening oor Euklidiese Meetkunde

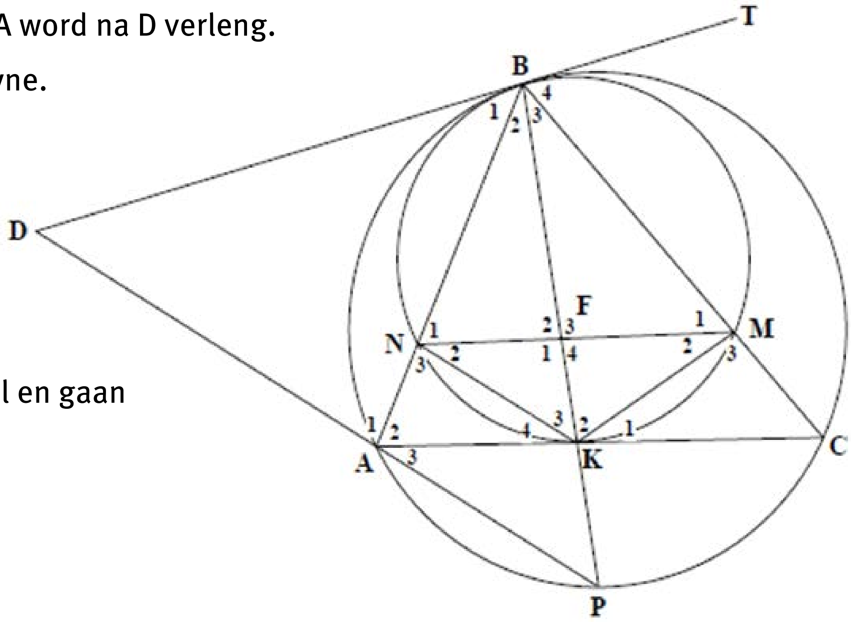
1 In die diagram is TBD by B 'n raaklyn aan sirkels BAPC en BNKM.
AKC is 'n koord van die groter sirkel en is ook 'n raaklyn aan die kleiner sirkel by K.
Koorde MN en BK sny by F. PA word na D verleng.
BMC, BNA en BFKP is reguitlyne.
Bewys dat:

a MN ∥ CA

b ΔKMN is gelykbenig

c $\frac{BK}{KP} = \frac{BM}{MC}$

d DA is 'n raaklyn aan die sirkel en gaan deur punte A, B en K.



2 In die diagram hieronder word koord BA en raaklyn TC van sirkel ABC verleng om by R te ontmoet. BC word na P verleng met RC = RP. AP is nie 'n raaklyn nie.

Bewys dat:

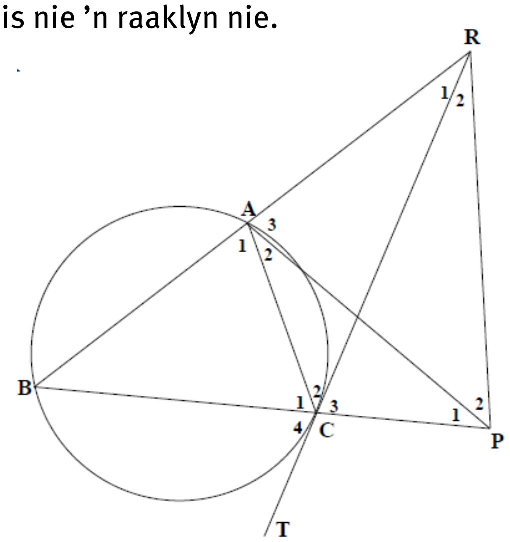
a ACPR 'n koordevierhoek is

b $\Delta CBA|||\Delta RPA$

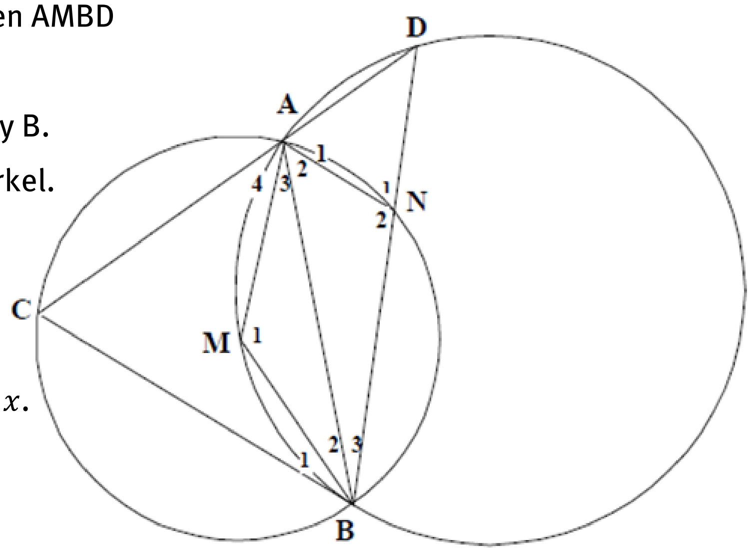
c $RC = \frac{CB.RA}{AC}$

d $RB.AC = RC.CB$

e Bewys vervolgens dat $RC^2 = RA.RB$.



3 In die diagram regs sny sirkels ACBN en AMBD by A en B.
CB is 'n raaklyn aan die groter sirkel by B.
M is die middelpunt van die kleiner sirkel.
CAD en BND is reguitlyne.
Laat $\hat{A}_3 = x$.



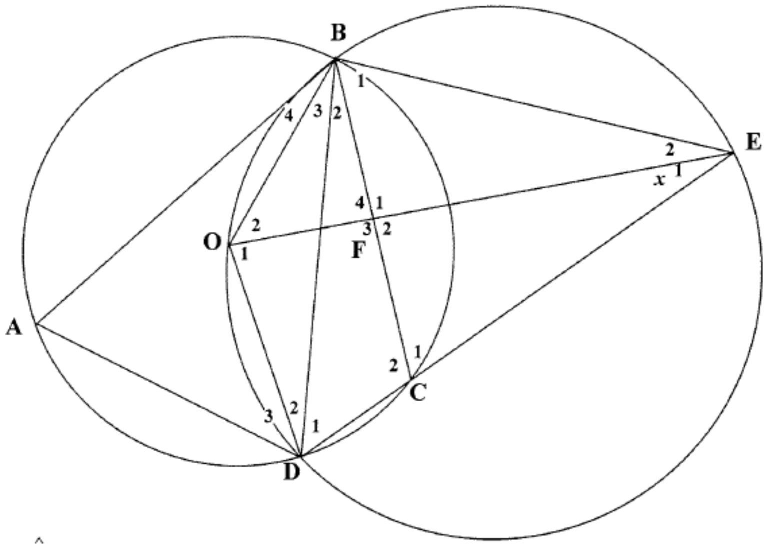
a Bepaal die grootte van $\widehat{D}$ in terme van x.

b Bewys dat:

i CB ∥ AN

ii AB 'n raaklyn aan sirkel ADN is.

4 In die diagram hieronder is O die middelpunt van sirkel ABCD.
DC word verleng om sirkel BODE by punt E te ontmoet.
OE sny BC by F. Laat $\widehat{E}_1 = x$.



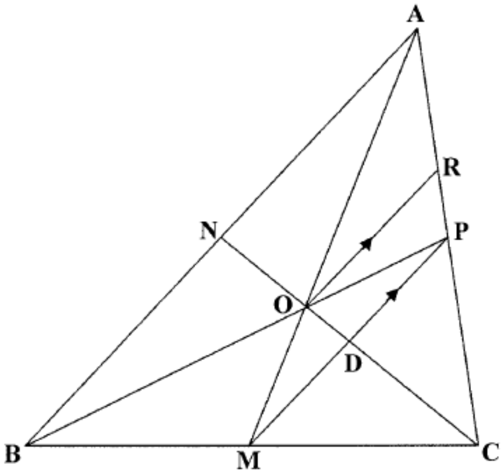
a Bepaal $\hat{A}$ in terme van x.

b Bewys dat:

i BE=EC

ii BE NIE 'n raaklyn aan sirkel ABCD is nie.

.



5 In die diagram regs sny swaartelyne AM en CN

van ΔABC by O.

BO word verleng om AC by P te ontmoet.

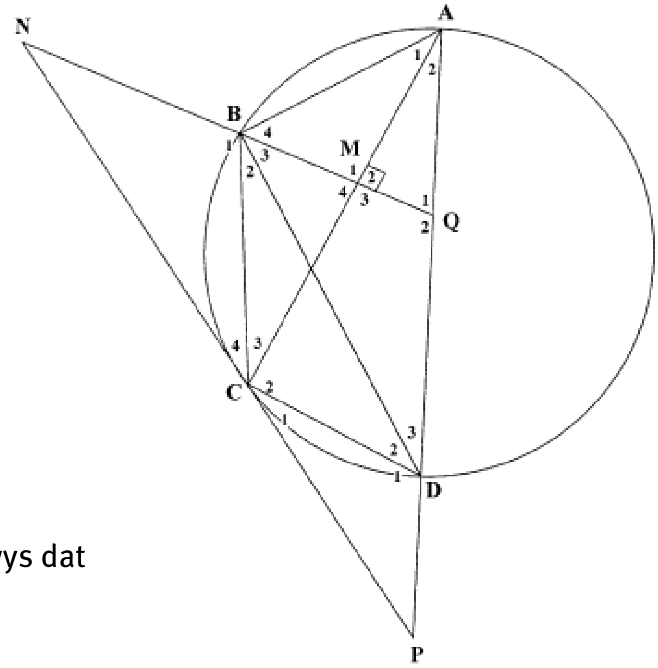
MP en CN sny in D.

OR∥MP met R op AC.

a Bereken, met redes, die numeriese waarde van $\frac{ND}{NC}$.

b Gebruik $AO\colon AM = 2\colon 3$ om die numeriese waarde van $\frac{RP}{PC}$ te bereken.

6 In die diagram is AD die middellyn van sirkel ABCD.
AD word verleng om raaklyn NCP in P te ontmoet.
Reguitlyn NB word na Q verleng en sny AC
in M met Q op reguitlyn ADP.
AC⊥NQ by M.



a Bewys dat NQ∥CD.

b Bewys dat ANCQ ’n koordevierhoek is.

c i Bewys dat $\Delta PCD|||\Delta PAC$.

ii Voltooi vervolgens: $PC^2 = \cdots$

d Bewys dat $BC^2 = CD.NB$

e As dit verder gegee word dat PC=MC, bewys dat

$$1 - \frac{BM^2}{BC^2} = \frac{AP.DP}{CD.NB}$$

Oorsig

Hoofstuk 11 Bladsy 250 Statistiek: regressie en korrelasie	**Eenheid 1 Bladsy 254**	
	Simmetriese en skewe data	• Simmetriese data • Skewe data
	Eenheid 2 Bladsy 258	
	Spreidingsdiagramme en korrelasie	• Tweeveranderlike data • Korrelasie • Voorbeelde van spreidingsdiagramme en korrelasie • Teken van spreidingsdiagramme • Die kleinste-kwadrate-metode • Die korrelasiekoëffisiënt • Gebruik 'n sakrekenaar om die regressielyn te bepaal

ONTHOU, JOU STUDIEBENADERING MOET WEES:

1. Werk deur al die voorbeelde in hierdie hoofstuk van jou handboek.
2. Werk deur die aantekeninge in hierdie hoofstuk van die studiegids.
3. Doen die oefeninge aan die einde van die hoofstuk in die handboek.
4. Doen die gemengde oefeninge aan die einde van hierdie hoofstuk in die studiegids.

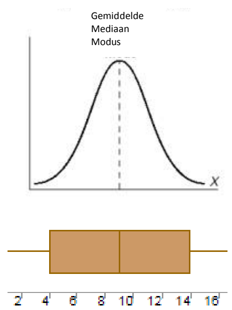
Jy kan net Wiskunde LEER as jy Wiskunde DOEN!

Hoofstuk 11

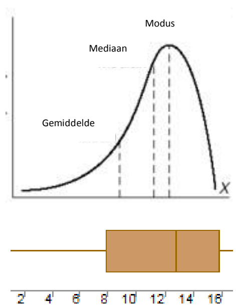
Statistiek: regressie en korrelasie

	ONGEGROEPEERDE DATA	GEGROEPEERDE DATA
Sentrale waardes	Modus = getal met die hoogste frekwensie	Modale klas = interval met hoogste frekwensie
	Gemiddelde $= \frac{Som\ van\ die\ waardes}{Aantal\ waardes}$	Geskatte gemiddelde $= \frac{\sum x_i \times f_i}{\sum f_i}$ waar $x_i =$ middelpunt van klas i en $f_i =$ frekwensie van klas i
	Let Wel: Data moet in stygende orde gerangskik word. Q_2, Mediaan = Middelwaarde (vir 'n onewe getal waardes) Of $\frac{Som\ van\ twee\ middelwaardes}{2}$ (vir 'n ewe getal waardes)	Mediaanklasinterval = klas/interval waarin middelwaarde lê **Posisie** van $Q_2 = \frac{(n+1)}{2}$
Maatstawwe van dispersie (toon spreiding van data)	Persentiele (verdeel data in 100 gelyke dele) Bv. die posisie van $P_{30} = \frac{30}{100}(n+1)$	
	Q_1, laer kwartiel = middelwaarde van al die waardes **onder** die mediaan (uitsluitend mediaan)	**Posisie** van $Q_1 = \frac{(n+1)}{4}$
	Q_3, hoër kwartiel = middelwaarde van al die waardes **bo** die mediaan (uitsluitend mediaan)	**Posisie** van $Q_3 = \frac{3(n+1)}{4}$
	Variasiewydte = maksimum – minimum	
	Interkwartielvariasiewydte (IQR) $= Q_3 - Q_1$	
	Semi-interkwartielvariasiewydte $= \frac{Q_3 - Q_1}{2}$	
	Vyfgetal-opsomming (word gebruik om mond-en-snor-diagram te teken): Min, Q_1, Mediaan, Q_3, Maks	

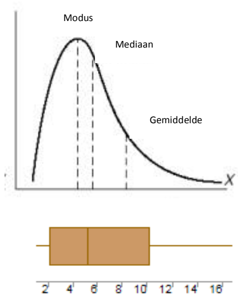
VERSPREIDING VAN DATA		
SIMMETRIESE VERSPREIDING	**ASIMMETRIESE** VERSPREIDINGS	
NORMALE VERSPREIDING	**NEGATIEF SKEEF**	**POSITIEF SKEEF**
$\boldsymbol{gemiddelde = mediaan = modus}$	$gemiddelde - mediaan < 0$	$gemiddelde - mediaan > 0$



Simmetries



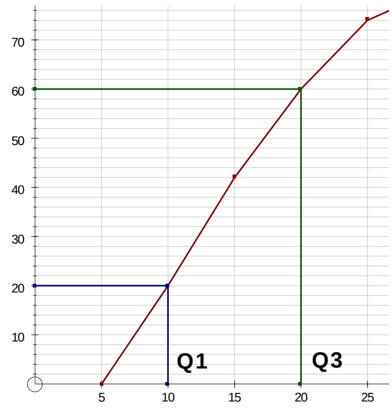
Skeef na links



Skeef na regs

OGIEF

Ogief = kumulatiewe frekwensiegrafiek



Let Wel: Wanneer jy die ogief teken:

- stip die (hoër klaslimiet : kumulatiewe frekwensie)
- moet die grafiek aan die horisontale as raak
- moet die vorm van die grafiek egalig wees

  eerder as dat dit uit "kolletjies wat verbind is", bestaan.

DIE OGIEF KAN GEBRUIK WORD OM DIE MEDIAAN EN KWARTIELE TE BEPAAL.

MAATSTAWWE VAN DISPERSIE OM DIE GEMIDDELDE

VARIANSIE σ^2

Variansie, σ^2, is 'n aanduiding van hoe ver elke waarde in die datastel van die gemiddelde, $\bar{x}$, is.

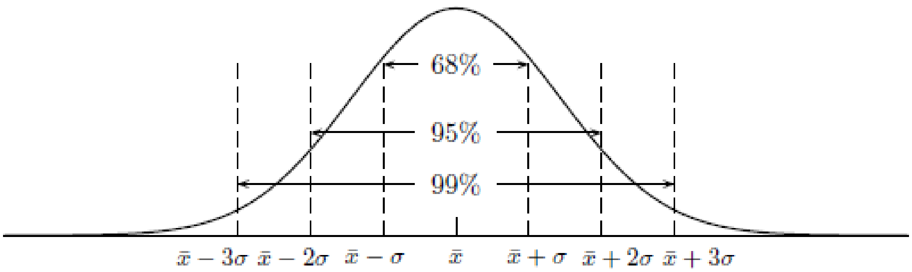
$$\sigma^2 = \frac{\sum(x_i - \bar{x})^2}{n} \quad \text{(vir populasie)}$$

STANDAARDAFWYKING σ

Standaardafwyking (SD), σ: SD $= \sqrt{variansie}$

Hoe groter die standaardafwyking, hoe groter sal die afwyking van die gemiddelde wees.

'n Normale verspreiding word hier getoon:



GEBRUIK 'N TABEL OM VARIANSIE EN STANDAARDAFWYKING TE BEREKEN

ONGEGROEPEERDE DATA

Bereken eers die **gemiddelde,**$\bar{x}$, dan die volgende kolomme.

DATAWAARDES, x	$(x-\bar{x})$	$(x-\bar{x})^2$

Bereken die totaal van hierdie kolom,$\sum(x-\bar{x})^2$

Variansie $= \frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n}$

Standaardvariansie $= \sqrt{variansie}$

GEGROEPEERDE DATA

Bereken eers die **geskatte gemiddelde,** $\bar{x} = \frac{\sum f \times m}{\sum f}$

Klas-interval	Frekwensie f	Middelpunt m	$f \times m$	$m-\bar{x}$	$(m-\bar{x})^2$	$f \times (m-\bar{x})^2$

Bereken die totaal van hierdie kolom

Variansie $= \frac{\sum f(x-\bar{x})^2}{n}$

Standardvariansie $= \sqrt{variansie}$

GEBRUIK 'n SAKREKENAAR OM STANDAARDAFWYKING TE BEREKEN

MODE

2 : STAT

1 : 1 – VAR

Voer die datapunte in: Druk = na elke datapunt

AC

SHIFT STAT (bokant die 1-sleutel)

4 : VAR

3: σxn

Om skerm skoon te maak: MODE 1: COMP

> Om die **frekwensiekolom** aan te skakel wanneer jy die standaardafwyking vir 'n frekwensietabel bereken, doen eers die volgende:
>
> Shift Setup; Af-pyltjie (op groot REPLAY-sleutel); 3: STAT; 2: ON

BEPALING VAN UITSKIETERS

Interkwartielvariasiewydte, IKV $= Q_3 - Q_1$

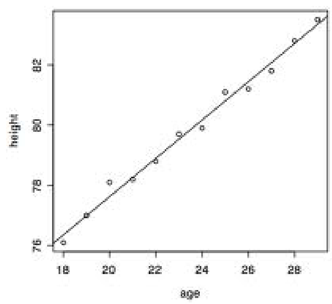
'n Uitskieter word geïdentifiseer as dit:

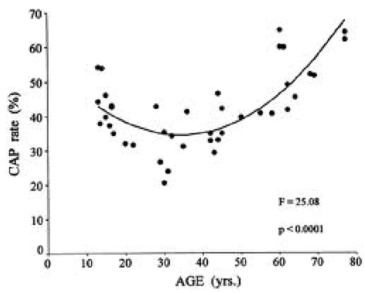
- kleiner as $Q_1 - IKV \times 1{,}5$ of
- groter as $Q_3 + IKV \times 1{,}5$ is.

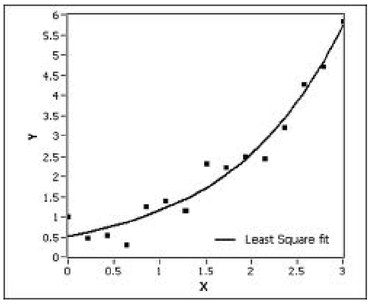
SPREIDINGSDIAGRAMME () VIR TWEEVERANDERLIKE DATA

Spreidingsdiagramme word gebruik om grafies te bepaal of daar 'n verband tussen twee veranderlikes is.

'n Mens kan deur ondersoek bepaal watter van die volgende krommes (regressiefunksies) die beste by die diagram pas:







Lineêr (reguitlyn) Kwadraties (parabool) Eksponensiaalfunksie

GEBRUIK VAN 'N SAKREKENAAR OM DIE VERGELYKING VAN DIE REGRESSIELYN (KLEINSTE-KWADRATE-REGRESSIELYN) TE BEPAAL

Die standaardvorm van 'n reguitlynvergelyking is: $y = mx + c$, waar m die gradiënt en c die y-afsnit is.

Let Wel: Op die sakrekenaar word die regressielyn in die vorm $\boldsymbol{y = A + Bx}$ bepaal.
(In hierdie vorm B = die gradiënt van die lyn en A = die y-afsnit.)

Druk die volgende op die sakrekenaar:

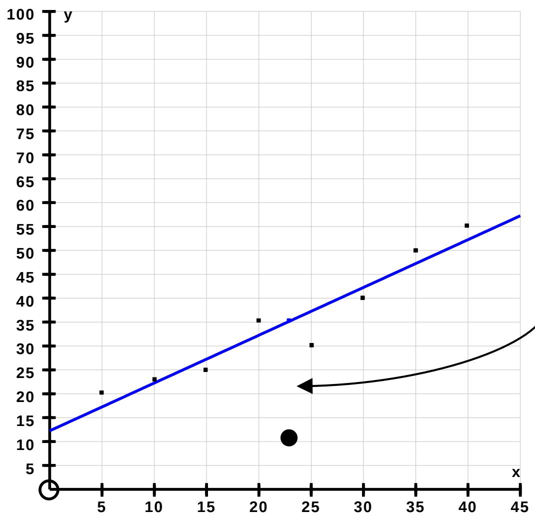
MODE 2
2: A+Bx
Voer die datapunte in (kolom X en Y): Druk = na elke datapunt
Druk AC.SHIFT STAT
5: REG
1: A = (om die y-afsnit van die lyn te bepaal)
SHIFT STAT
5: REG
2: B = (om die gradiënt van die lyn te bepaal)
SHIFT STAT
5: REG
3: r = (om korrelasiekoëffisiënt te bepaal)

VOORBEELD

x	5	10	15	20	25	30	35	40
y	20	223	25	35	30	40	50	55

Met behulp van die sakrekenaar kan die vergelyking vir die lyn van beste passing (of regressielyn) bepaal word, en gee dan:

$$y = 1x + 12{,}25$$



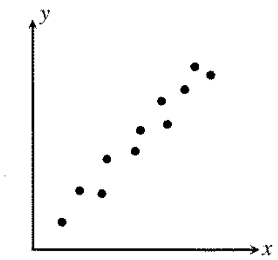
LW: Die lyn van beste passing gaan ALTYD deur die punt $(\bar{x}; \bar{y})$.

In hierdie geval gaan dit deur die punt (23 ; 35).

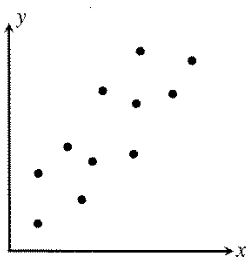
KORRELASIE

Die **sterkte van die verwantskap** tussen die twee veranderlikes wat in 'n spreidingsdiagram voorgestel word, hang af van hoe naby die punte aan die lyn van beste passing lê. Hoe nader die punte aan hierdie lyn lê, hoe die sterker is die verwantskap of **korrelasie**.

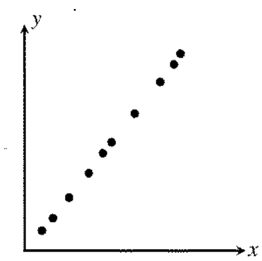
Korrelasie (die neiging van die grafiek) kan soos volg in terme van die algemene verspreiding van datapunte beskryf word:



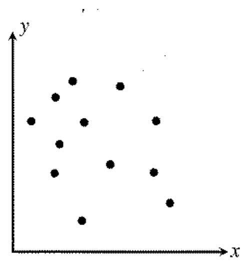
Sterk positief



Redelik sterk positief

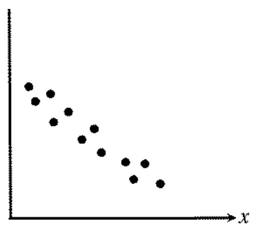


Volkome positief

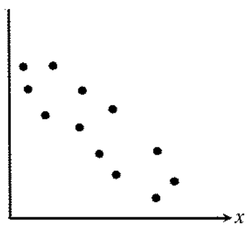


Geen korrelasie nie

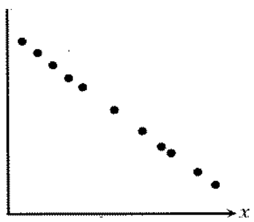
Korrelasie



Sterk negatief



Redelik sterk negatief



Volkome negatief

KORRELASIEKOËFFISËNT

Die korrelasie tussen twee veranderlikes kan ook in terme van 'n getal bekend as die korrelasiekoëffisiënt beskryf word. Die korrelasiekoëffisiënt, r, dui die sterkte en die rigting van die korrelasie tussen twee veranderlikes aan. Hierdie getal kan enigiets tussen -1 en 1 wees.

r	Interpretasie
$\mathbf{1}$	Volkome positiewe verwantskap
$\mathbf{0,9}$	Sterk positiewe verwantskap
$\mathbf{0,5}$	Redelik sterk positiewe verwantskap
$\mathbf{0,2}$	Swak positiewe verwantskap
$\mathbf{0}$	Geen verwantskap nie
$\mathbf{-0,2}$	Swak negatiewe verwantskap
$\mathbf{-0,5}$	Redelik swak negatiewe verwantskap
$\mathbf{-0,9}$	Sterk negatiewe verwantskap
$\mathbf{-1}$	Volkome negatiewe verwantskap

Voorbeeld

Verwys weer na die vorige voorbeeld.

Vir die gegewe datastel $r = 0{,}958$, wat beteken dat daar 'n sterk positiewe verwantskap tussen die twee veranderlikes is.

Gemengde oefening oor Statistiek

1 ’n Nasionale sokkerspan het die afgelope 14 jaar in ’n kompetisie teen spanne van ander lande deelgeneem. Hul uitslae was soos volg:

JAAR	WEDSTRYDE GESPEEL	GEWEN	GELYKOP	VERLOOR	DOELE VIR	DOELE TEEN
1999	5	3	2	0	11	3
2000	3	1	1	1	2	22
2001	5	3	1	1	10	4
2002	4	2	0	2	8	6
2003	7	2	3	2	5	4
2004	7	6	1	0	14	5
2005	5	2	0	3	8	7
2006	7	5	1	1	15	4
2007	6	1	2	3	9	11
2008	4	2	1	1	4	2
2009	3	1	1	1	2	3
2010	3	1	0	2	5	10
2011	1	0	0	1	2	3
2012	5	4	0	1	18	9

a Bepaal die kwartiele vir:

i die wedstryde gespeel

ii die wedstryde wat hulle gewen het

iii die doele wat teen die sokkerspan aangeteken is.

b Teken ’n mond-en-snor-diagram vir die doele wat teen die sokkerspan aangeteken is en lewer kommentaar op die verspreiding van die data.

c Bereken die gemiddelde van die aantal wedstryde wat gespeel is.

d Bereken die standaardafwyking van die aantal wedstryde wat gespeel is.

2 Vyftig mense is gevra watter persentasie van hul Desember-vakansie-uitgawes aan vervoer bestee is. Die resultate was soos volg:

PERSENTASIE	FREKWENSIE (f)
$10 < x \leq 20$	6
$20 < x \leq 30$	14
$30 < x \leq 40$	16
$40 < x \leq 50$	11
$50 < x \leq 60$	3

a Teken 'n ogief om die bostaande data voor te stel.

b Gebruik jou ogief en bepaal die mediaanpersentasie van die vakansie-uitgawes wat aan vervoer bestee is.

b Bereken die geskatte gemiddelde.

c Bereken die standaardafwyking van die data.

3 'n Atleet se vermoë om suurstof in te neem en te gebruik word sy of haar VO_2-maksimum genoem. Die volgende tabel toon elf atlete se VO_2-maksimum en die afstand wat hulle in 'n uur gehardloop het.

VO_2-maks	20	55	30	25	40	30	50	40	35	30	50
Afstand (km)	8	18	13	10	11	12	16	14	13	9	15

a Stel die data op 'n spreidingsdiagram voor.

b Bepaal die vergelyking van die lyn van beste passing.

c Teken die lyn van beste passing op die spreidingsdiagram.

d Gebruik jou lyn van beste passing om die VO_2-maksimum te bepaal van 'n atleet wat 19 km hardloop.

e Bepaal die korrelasiekoëffisiënt van die data en lewer kommentaar op die korrelasie.

4 Vyf getalle, $4; 8; 10; x$ en y, het 'n gemiddelde van 10 en 'n standaardafwyking van 4. Bepaal x en y.

5 Die standaardafwyking van vyf getale is 7,5. Elke getal vermeerder met 2. Wat sal die standaardafwyking van die nuwe versameling getalle wees? Verduidelik jou antwoord.

Oorsig

Hoofstuk 12 Bladsy 268 Waarskynlikheid	**Eenheid 1 Bladsy 270**	
	Oplossing van waarskynlikheidsprobleme	• Venn-diagramme • Boomdiagramme • Tweerigting-gebeurlikheidstabelle
	Eenheid 2 Bladsy 276	
	Die telbeginsel	• Die fundamentele telbeginsel
	Eenheid 3 Bladsy 280	
	Die telbeginsel en waarskynlikheid	• Gebruik van die telbeginsel om waarskynlikheid te bereken

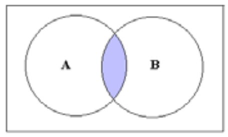
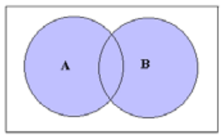
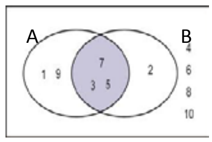
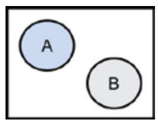
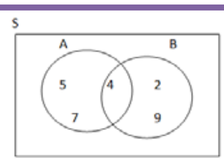
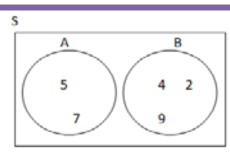
ONTHOU, JOU STUDIEBENADERING MOET WEES:

1 Werk deur al die voorbeelde in hierdie hoofstuk van jou handboek.
2 Werk deur die aantekeninge in hierdie hoofstuk van die studiegids.
3 Doen die oefeninge aan die einde van die hoofstuk in die handboek.
4 Doen die gemengde oefeninge aan die einde van hierdie hoofstuk in die studiegids.

Jy kan net Wiskunde LEER as jy Wiskunde DOEN!

Hoofstuk 12

Waarskynlikheid

OPSOMMING VAN TEORIE OOR WAARSKYNLIKHEID		
BEGRIP/DEFINISIE	WISKUNDIGE NOTASIE/REËL	VOORBEELD
Waarskynlikheid = die kans dat 'n gebeurtenis sal voorkom	P	Waardes van waarskynlikheid kan van 0 tot 1 wissel • vir 'n gebeurtenis, K, wat beslis NIE gaan gebeur nie, $P(K) = 0$ • vir 'n gebeurtenis, K wat BESLIS gaan gebeur, $P(K) = 1$.
Steekproefruimte = die versameling van alle moontlike uitkomste	S	
Die aantal elemente in die steekproefruimte	$n(S)$	As $S = \{2; 4; 6\}$, dan $n(S) = 3$
Algemene reël vir A en B binne die steekproefruimte S	$P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B) - P(A \text{ en } B)$	
Interseksie	$A \text{ en } B$ of $A \cap B$	
Vereniging	$A \text{ of } B$ of $A \cup B$	
Insluitende gebeurtenisse het elemente gemeen	$P(A \cap B) \neq 0$	
Onderling uitsluitend/disjunkte gebeurtenisse het GEEN INTERSEKSIE NIE, en het dus GEEN elemente gemeen nie	$P(A \cap B) = 0$ $\therefore P(A \text{ of } B) = P(A) + P(B)$	
Alomvattende gebeurtenisse = saam bevat hulle ALLE elemente van S	$\therefore P(A \cap B) = 1$	
Komplement van A = alle elemente wat NIE in A is nie	Komplement van A = A'	
Komplementêre gebeurtenisse = onderling uitsluitend en alomvattend (alles wat NIE in A is nie, is in B)	$P(nie\ A) = 1 - P(A)$ $P(A') = 1 - P(A)$ Of $P(A') + P(A) = 1$	
Onafhanklike gebeurtenisse = uitkoms van die 1ste gebeurtenis beïnvloed NIE die uitkoms van die 2de gebeurtenis nie	$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$	Skiet 'n muntstuk op en rol 'n dobbelsteentjie.
Afhanklike gebeurtenisse = uitkoms van die 1ste gebeurtenis	$P(A \cap B) \neq P(A) \times P(B)$	Kies 'n bal uit 'n sak, sit dit nie terug nie en kies dan 'n 2de bal.

beïnvloed WEL die uitkoms van die 2de gebeurtenis		

FAKTORIAALNOTASIE

Die produk $5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ kan as 5 geskryf word!

$$\therefore n! = n \times (n-1) \times (n-2) \times \ldots \times 3 \times 2 \times 1$$

Die Fundamentele Telbeginsel	
REËL	VOORBEELD
REËL 1 **Waar daar m maniere is om een ding te doen en n maniere om 'n ander ding te doen, is daar $m \times n$ maniere om albei te doen.**	a) Jy het 3 langbroeke en 4 hemde. Dit beteken jy het $3 \times 4 = 12$ verskillende kledingstukke.
REËL 2 **Waar n verskillende dinge in n posisies geplaas moet word, is die aantal rangskikkings $n!$.**	b) 5 kinders moet sitplekke op 5 stoele in die voorste ry van 'n klas gegee word. Die aantal maniere waarop hulle kan sit, is $5! = 120$
REËL 3 **Waar n verskillende dinge in r posisies geplaas moet word, is die aantal rangskikkings $\frac{n!}{(n-r)!}$.**	c) 8 studente het aan 'n 100 m-wedloop deelgeneem. Die eerste drie posisies kan op $\frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 8 \times 7 \times 6 = 336$ maniere saamgestel word.
REËL 4 **Wanneer s seuns en m meisies sitplekke in 'n ry moet kry, is die aantal rangskikkings:** • **Seuns en meisies <u>in enige orde</u>: $(s+m)!$ maniere** • **<u>Seuns bymekaar</u> en <u>meisies bymekaar</u>: $2 \times b! \times g!$ maniere** • **<u>Net meisies</u> bymekaar: $(s+1)! \times m!$ rangskikkings** • **<u>Net seuns</u> bymekaar: $(m+1)! \times s!$ rangskikkings**	d) 3 meisies en 4 seuns moet sitplekke op 7 stoele gegee word, met meisies bymekaar en seuns bymekaar. Aantal maniere $= 2 \times 3! \times 4! = 288$ e) 5 wiskundeboeke en 2 wetenskapboeke moet op 'n rak gesit word, maar die wiskundeboeke moet bymekaar gesit word. Aantal maniere $= (2+1)! \times 5! = 360$

LETTERRANGSKIKKINGS

Wanneer jy nuwe woorde van die letters in ’n gegewe woord maak, moet jy tussen die volgende onderskei:

As letters as VERSKILLENDE letters beskou word, is die normale telbeginsel (Reël 2) van toepassing.

As herhaalde letters as IDENTIES beskou word, is die volgende reël van toepassing:

Vir n letters waarvan m_1 identies is, m_2 identies is, ... en m_n identies is, word die aantal rangskikkings gegee deur:

$$\frac{n!}{m_1! \times m_2! \times \ldots \times m_n!}$$

Voorbeelde:

1 Hoeveel verskillende rangskikkings kan met die letters van die woord ONMIDDELLIK gevorm word as herhaalde letters as **verskillende** letters beskou word?
Die letters word as 11 verskillende letters beskou.
Aantal rangskikkings 11!

2 Hoeveel verskillende rangskikkings kan met die letters van die woord ONMIDDELLIK gevorm word as herhaalde letters as **identies** beskou word?
Die letters word as 11 verskillende letters beskou.
Aantal rangskikkings $= \frac{11!}{2! \times 2! \times 2!} = 6\ 652\ 800$
(Die I, D en L word herhaal.)

Gemengde oefening oor Waarskynlikheid

1 Hoeveel verskillende 074-selfoonnommers is moontlik as die syfers nie herhaal mag word nie?

2 Hoeveel verskillende 082-selfoonnommers is moontlik as die syfers net heelgetalle mag wees?

3 Wat is die waarskynlikheid dat jy 'n koningin van ruitens uit 'n stel kaarte sal trek?

4 Hoeveel verskillende rangskikkings kan met die letters van die woord TSITSIKAMMA gemaak word as:

  a herhaalde letters as verskillende letters beskou word

  b herhaalde letters as identies beskou word?

5 Vier verskillende Engelse boeke, drie verskillende Duitse boeke en twee verskillende Afrikaanse boeke word willekeurig op 'n rak gerangskik.

Bereken die aantal rangskikkings as:

  a die Engelse boeke bymekaar gehou moet word

  b alle boeke van dieselfde taal bymekaar gehou moet word

  c die orde van die boeke nie saak maak nie.

6 Op hoeveel verskillende maniere kan 'n voorsitter en 'n visevoorsitter uit 'n komitee van 12 mense gekies word?

7 Die letters van die woord ONMIDDELLIK moet herrangskik word. Bereken die waarskynlikheid dat die "woord" wat gevorm word nie met dieselfde letters sal begin en eindig nie.

8 Op hoeveel verskillende maniere kan die letters van die woord DIGKUNDIGES herrangskik word sodat

  a die K en die U bymekaar bly

  b die U sy posisie behou?

Antwoorde vir gemengde oefeninge

Hoofstuk 1: Getalpatrone, rye en Reekse

1 a $T_n = a + (n-1)d$

$a = 5$; $d = 4$

$T_n = 5 + (n-1)4 = 4n + 1$

b $217 = 4n + 1$

$4n = 216$

$\therefore n = 54$

2 a $9 = ar^4$

$729 = ar^8$

$\frac{729}{9} = \frac{ar^8}{ar^4}$

$r^4 = 81$

$r = \pm 3$

b $T_{10} = r \times T_9$

$T_{10} = \pm 2187$

3 a $T_2 - T_1 = T_3 - T_2$

$\big(5x - (2x-4)\big) = \big((7x-4) - 5x\big)$

$5x - 2x - 7x + 5x = -4 - 4$

$x = -8$

b -20 ; -40 ; -60

4 a $T_n = an^2 + bn + c$

$a = \frac{3}{2}$

$b = 5 - 3\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}$

$c = 2 - \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 0$

$T_n = \left(\frac{3}{2}\right)n^2 + \left(\frac{1}{2}\right)n$ LW: Alternatiewe metodes kan gebruik word.

b $260 = \left(\frac{3}{2}\right)n^2 + \left(\frac{1}{2}\right)n$

$3n^2 + n - 520 = 0$

$(3n + 40)(n - 13) = 0$

$n = 13$

$13de$ term is gelyk aan 260.

5 $T_n = a + (n-1)d$

$a = 17\ ;\ d = -3$

$-2785 = 17 + (n-1)(-3)$

$-2802 = (n-1)(-3)$

$934 = (n-1)$

$n = 935$

Die ry het 935 terme.

6 a $T_n = n^2$

b $T_n = an^2 + bn + c$

$a = 4 \div 2 = 2$

$b = 8 - 3(2) = 2$

$c = 4 - 2 - 2 = 0$

$\therefore\ T_n = 2n^2 + 2n$

7 a $T_1 = 3\ ;\ T_2 = -2\ ;\ T_3 = -7$

$S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$a = 3\ ;\ d = -5$

$S_{30} = \frac{30}{2}[2(3) + (30-1)(-5)]$

$S_{30} = -2085$

b $T_1 = \frac{1}{2}\ ;\ T_2 = 1\ ;\ T_3 = 2$

$S_9 = \frac{\frac{1}{2}(2^9 - 1)}{2-1}$

$S_9 = 255{,}5$

8 $n = 6$

$T_n = 1 + (n-1)4 = 4n - 3$

$1 + 5 + 9 + \cdots + 21 = \sum_{k=1}^{6} 4k - 3$

9 a $T_5 = 0\ ; T_{13} = 12$

$0 = a + 4d$ ...(1)

$12 = a + 12d$ ...(2)

(2)-(1): $12 = 8d$

$d = \frac{3}{2}$

$a = -4\left(\frac{3}{2}\right) = -6$

9 b $S_{21} = \frac{21}{2}\left[2(-6) + (21-1)\left(\frac{3}{2}\right)\right]$

$S_{21} = 189$

10 a Om 'n konvergerende ry te wees: $-1 < r < 1$.

$r = \frac{T_2}{T_1} = \frac{(x^2-9)}{x+3}$

$r = \frac{(x+3)(x-3)}{x+3}$

$r = x - 3$

$\therefore\ -1 < x - 3 < 1$

$2 < x < 4$

b $S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$13 = \frac{(x+3)}{1-(x-3)}$

$13 = \frac{(x+3)}{(-x+4)}$

$13(-x+4) = (x+3)$

$-13x + 52 = x + 3$

$-13x - x = 3 - 52$

$-14x = -49$

$x = \frac{7}{2}$

11 Vir die reeks in die teller:

$99 = 1 + (n-1)2$

$n = 50$ terme

$S_{50} = \frac{50}{2}[2(1) + (50-1)2] = 2\,500$

Vir die reeks in die noemer:

$299 = 201 + (n - 1)2$

$n = 50$ terme

$S_{50} = \frac{50}{2}[2(201) + (50 - 1)2] = 12\ 500$

Waarde $= \frac{2\ 500}{12\ 500} = \frac{1}{5}$

12 $T_9 = S_9 - S_8$

$S_9 = 3(9)^2 - 2(9) = 225$

$S_8 = 3(8)^2 - 2(8) = 176$

$\therefore T_9 = 225 - 176 = 49$

13 a Laat $r =$ konstante verhouding

$7r^3 = 189$

$r^3 = 27$

$r = 3$

$x = 7 \times 3 = 21$

$y = 21 \times 3 = 63$

b $206\ 668 = \frac{7(3^n - 1)}{3 - 1}$

$206\ 668 = \frac{7(3^n - 1)}{2}$

$413\ 336 = 7(3^n - 1)$

$59\ 048 = 3^n - 1$

$3^n = 59\ 049$

$3^n = 3^{10}$

$\therefore n = 10$

<u>Hoofstuk 2: Funksies</u>

1 $2x - 3y = 17 \quad \ldots(1)$

$3x - y = 15 \quad \ldots(2)$

$(2) \times 3: 9x - 3y = 45 \quad \ldots(3)$

$(1) - (3): -7x = -28$

$x = 4$

Vervang in (1):

$2(4) - 3y = 17$

$y = -3$

Afsnit is $(4; -3)$

2 a $y = mx + 3$

Vervang $(-3; 0)$

$0 = m(-3) + 3$

$m = 1$

$\therefore y = x + 3$

b $y = mx + 1$

Vervang $(2; -1)$:

$-1 = m(2) + 1$

$m = -1$

$g: y = -x + 1$

c $x + 3 = -x + 1$

$2x = -2$

$x = -1$

Vervang $x = -1$:

$y = -1 + 3 = 2$

$\therefore P(-1; 2)$

d Ja, omdat die produkte van hul gradiënte -1 is.

$(-1 \times 1 = -1)$

e $y = -x - 2$

3 a Laat $y = 0$:

$0 = x^2 - 2x - 3$

$0 = (x - 3)(x + 1)$

$\therefore x = 3 \text{ of } x = -1$

$A(-1; 0)$ en $B(3; 0)$

Laat $x = 0$:
$y = (0)^2 - 2(0) - 3$
$y = -3$
$\therefore C(0; -3)$

$OA = 1$ eenheid
$OB = 3$ eenhede
$OC = 3$ eenhede

b $x = \frac{-b}{2a} = \frac{2}{2(1)} = 1$

Vervang $x = 1$:
$y = (1)^2 - 2(1) - 3 = -4$
$D(1; -4)$

c $c = -3$
$m = \frac{-3-0}{0-3}$
$m = 1$

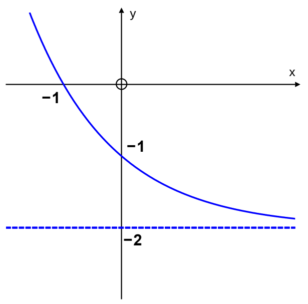
d Vir die grafiek om net een reële wortel te hê, moet dit 4 eenhede boontoe skuif.
$y = x^2 - 2x - 3 + 4 = x^2 - 2x + 1$
$\therefore k = 1$

4a Laat $y = 0$:
$0 = -2(x+1)^2 + 8$
$0 = -2x^2 - 4x + 6$
$0 = (-2x + 2)(x + 3)$
$x = 1 \;\; of \; x = -3$
$A(-3; 0)$ en $B(1; 0)$
$AB = 4$ eenhede

b $C(-1; 8)$

c $x = 0, \;\; y = 6$
$D(0\,; 6) \;\; E(-2; 6)$
$\therefore DE = 2$ eenhede

5 a



b $x \in R$

c $x \leq -1$

6 a Vervang die punt A in die vergelyking $y = \frac{a}{x}$

$2 = \frac{a}{-2}$

$a = -4$

b $B(2; -2)$

c $y = \frac{-4}{x-1} + 2$

7 a $y = -(0)^2 - 2(0) + 8 = 8$

$A(0; 8)$

b $0 = -x^2 - 2x + 8$

$0 = (-x + 2)(x + 4)$

$x = 2 \ \ of \ x = -4$

$B(-4; 0)$ en $C(2; 0)$

c $D(-1; 0)$

$CD = 3$ eenhede

d $x = -1$

$y = -(-1)^2 - 2(-1) + 8$

$y = -1 + 2 + 8 = 9$

$E(-1; 9)$

$DE = 9$ eenhede

e $A(0;8)$
$F(-2;8)$
$AF = 2$ eenhede

f $-x^2 - 2x + 8 = \frac{1}{2}x - 1$
$-2x^2 - 4x + 16 = x - 2$
$-2x^2 - 5x + 18 = 0$
$(2x+9)(-x+2) = 0$
$x = \frac{-9}{2}$ *of* $x = 2$
$x = \frac{-9}{2}$ by H
Vervang $x = \frac{-9}{2}$ in die vergelyking $y = \frac{1}{2}x - 1$
$y = \frac{1}{2}\left(\frac{-9}{2}\right) - 1$
$y = -\frac{13}{4}$
$\therefore G\left(\frac{-9}{2}; \frac{-13}{4}\right)$
$GH = 3{,}25$ eenhede

g $f(x) - g(x) = -x^2 - 2x + 8 - \left[\frac{1}{2}x - 1\right]$
$= -x^2 - \frac{5}{2}x + 9$
Minimum by draaipunt:
$x = \frac{\frac{5}{2}}{-2} = -\frac{5}{4}$

h $RS_{maks} = -\left(-\frac{5}{4}\right)^2 - \frac{5}{2}\left(\frac{-5}{4}\right) + 9 = \frac{169}{16}$

i $f(x) - g(x) > 0 \quad \therefore f(x) > g(x)$
$-\frac{9}{2} < x < 2$

8 a $y = -4$

b $y = b^x + c$
$c = -4$
$y = b^x - 4$

Vervang die punt $(2;5)$ in die vergelyking:
$5 = b^2 - 4$
$b^2 = 9$
$b = 3$
$y = 3^x - 4$

c $y = -1\,;\, x = -2$

d $y = \frac{a}{x+2} - 1$
Vervang die punt $A(0;-3)$:
$-3 = \frac{a}{0+2} - 1$
$-3 = \frac{a}{2} - 1$
$\frac{a}{2} = -2$
$a = -4$
$y = \frac{-4}{x+2} - 1$

e Vervang $(-2;-1)$ in $y = x + k_1$ en $y = -x + k_2$

$-1 = -2 + k_1$	$-1 = 2 + k_2$
$k_1 = 1$	$k_2 = -3$
$y = x + 1$	$y = -x - 3$

f $x > -2; x \neq 0$

9 a $y = 2x^2$
$x = 2y^2$
$y^2 = \frac{x}{2}$
$y = \pm\sqrt{\frac{x}{2}}$

b $x \leq 0\ of\ x \geq 0$

10 a $y = a^x$

Vervang punt A:

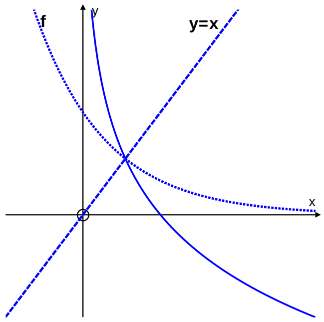
$3 = a^{-1}$

$a = \frac{1}{3}$

$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

b $f^{-1}: y = \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x$

c



d $x > 0$

11 $x -$ afsnit: $(3; 0)$

$y -$afsnit: $(0; -2)$

Hoofstuk 3: Logaritmes

1 a $x = 3^2 = 9$

b $x = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$

c $\log_4 x = -2$

$x = (4)^{-2} = \frac{1}{(4)^2} = \frac{1}{16}$

d $x = (5)^{-2} = \frac{1}{(5)^2} = \frac{1}{25}$

e $x^3 = 10^6$

$x = 10^2$

$x = 100$

f $81 = 3^x$

$3^x = 3^4$

$x = 4$

g $\frac{1}{9} = 3^x$

$3^x = 3^{-2}$

$x = -2$

2 a Vervang $\left(2; \frac{9}{4}\right)$: $\frac{9}{4} = a^2$

$a = \frac{3}{2}$

b $f^{-1}: y = \log_{\left(\frac{3}{2}\right)} x$

c $g(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{-x}$

d $h(x) = -\log_{\left(\frac{3}{2}\right)} x$

3 a i) $g(x) = -\log_2 x$

ii) $p(x) = \log_2(-x)$

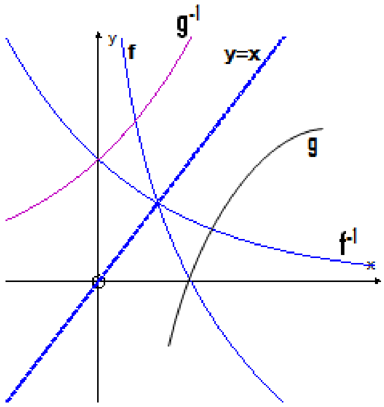
iii) $q(x) = -\log_2(-x)$

iv) $f^{-1}: y = 2^x$

v) $g^{-1}: y = 2^{-x}$

vi) $h(x) = \log_2(x + 2)$

b



c Vir f^{-1} en g^{-1}:

Definisieversameling $x \in R$;

Waardeversameling $y > 0$

4 a $y - \text{koördinaat} = 0$

$0 = \log_b x$

$x = b^0 = 1$

$A(1; 0)$

b Die grafiek neem toe soos wat x toeneem.

c Vervang B: $\frac{3}{2} = \log_b 8$

$8 = b^{\frac{3}{2}}$

$(8)^{\frac{2}{3}} = \left(b^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}}$

$b = (8)^{\frac{2}{3}} = (2^3)^{\frac{2}{3}} = 2^2 = 4$

d $g(x) = 4^x$

e Vervang $y = -2$: $-2 = \log_4 x$

$x = 4^{-2} = \frac{1}{16}$

Hoofstuk 4: Finansies, groei en verval

1 a $A = P(1 + i.n)$

$A = 15\,000\big(1 + (0{,}106)(5)\big)$

$A = R22\,950$

b $A = P(1 + i)^n$

$A = 15\,000\big(1 + (0{,}024)\big)^{20}$

$A = R24\,104{,}07$

Dit is beter om dit teen $9{,}6\%$ p.j., rente kwartaalliks saamgestel, te belê.

2 a Nominale rentekoers

b $A = P(1 + i)^n$

$95\,000 = P\left(1 + \frac{0{,}085}{12}\right)^{60}$

$P = \frac{95\,000}{\left(1+\frac{0{,}085}{12}\right)^{60}}$

$P = R62\,202{,}48$

c $R95\,000 - R62\,202{,}48 = R32\,797{,}52$

3 a $A = P(1+i)^n$

$A = 8\ 000(1+0.06)^2$

$A = R8\ 988{,}80$

b $F = \frac{x[(1+i)^n - 1]}{i}[1+i]$

$F = \frac{2\ 000\left[\left(\frac{0{,}07}{2}\right)^4 - 1\right]}{0.035}\left[1+\frac{0{,}07}{2}\right]$

$F = R8\ 724{,}93$

Sy sal nie oor twee jaar genoeg geld hê om die TV te koop nie.

4 a $1 + i_{eff} = \left(1+\frac{i_{nom}}{m}\right)^m$

$1 + i_{eff} = \left(1+\frac{0.0785}{12}\right)^{12}$

$i_{eff} = 0.08138\ \ldots$

$Eff. koers = 8.14\%$

b $1 + i_{ef} = \left(1+\frac{i_{nom}}{m}\right)^m$

$1 + 0{,}0925 = \left(1+\frac{i_{nom}}{4}\right)^4$

$\sqrt[4]{1{,}0925} = \left(1+\frac{i_{nom}}{4}\right)$

$1.022 - 1 = \frac{i_{nom}}{4}$

$i_{nom} = 0.0894\ \ldots$

Nom. koers= 8,95% p.j., kwartaalliks saamgestel

5 $A = P(1+i)^n$

$179\ 200 = 350\ 000(1-i)^3$

$0{,}512 = (1-i)^3$

$1 - i = \sqrt[3]{0{,}512}$

$i = 0.2$

Koers van waardevermindering= 20%

6 $A = \left[20\ 000\left(1+\frac{0.0975}{4}\right)^7 + 10\ 000\left(1+\frac{0.0975}{4}\right)\right]\left(1+\frac{0.0995}{12}\right)^{15}$

$A = [23\ 672.43 + 10\ 243.75](1.13185\ \ldots)$

$A = \text{R}38\ 388{,}36$

OF

$A = \left[20\ 000\left(1+\frac{0.0975}{4}\right)^{6} + 10\ 000\right]\left(1+\frac{0.0975}{4}\right)\left(1+\frac{0.0995}{12}\right)^{15}$

$A = [23\ 109.142 + 10\ 000](1.024375)(1.13\ldots)$

$A = \text{R}38\ 388{,}36$

7 a $A = 900\ 000(1-0.15)^5$

$A = R399\ 334{,}78$

$A = 900\ 000(1+0.18)^5$

$A = \text{R}2\ 058\ 981{,}98$

$\text{R}2\ 058\ 981{,}98 - \text{R}399\ 334{,}78 = \text{R}1\ 659\ 647{,}20$

b $1\ 659\ 647{,}20 = \frac{x[(1+0.02)^{61}-1]}{0{,}02}$

$x = \frac{0{,}02 \times 1659647{,}20}{[(1+0{,}02)^{61}-1]}$

$x = \text{R}14\ 144{,}81$

8 $A = P(1+i.n)$ 2 jaar = 24 maande

$(24 \times 85) = 1\ 500(1+i.2)$

$i = 0.18$

koers= 18%

9 a $P = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$

$P = \frac{(6\ 500)[1-(1+0{,}01)^{-240}]}{0{,}01}$

$P = \text{R}590\ 326{,}21$

b $P = \frac{(6\ 500)[1-(1+0{,}01)^{-96}]}{0{,}01}$

$P = \text{R}399\ 930{,}07$

10 $F = \frac{1\ 000\left[\left(1+\frac{0{,}01}{12}\right)^{73}-1\right]}{\frac{0{,}01}{12}}$

$F = \text{R}99\ 915{,}81$

$A = P(1+i)^n$

$A = 99\,915{,}81\left(1+\frac{0{,}01}{12}\right)^5$

$A = \text{R}104\,147{,}21$

11 $F = \frac{x[(1+i)^n-1]}{i}$

$48\,000 = \frac{300\left[\left(1+\frac{0{,}09}{12}\right)^n-1\right]}{\frac{0{,}09}{12}}$

$2{,}2 = (1{,}0075)^n$

$n = \log_{1{,}0075} 2{,}2$

$n = 106$

8 jaar en 10 maande

12 $A = P(1+i.n)$

$A = 13\,500\big(1+(0.12)(4)\big)$

$A = \text{R}19\,980$

Maandelikse paaiement = $R19\,980 \div 48 = R416{,}25$

Insluitend versekering = $R416{,}25 + R30 = R446{,}25$

13 $A = 400\,000(1+0{,}02)^4$

$A = \text{R}432\,972{,}86$ (bedrag verskuldig na 1 jaar)

$P = \frac{x[1-(1+i)^{-n}]}{i}$

$432\,972{,}86 = \frac{x[1-(1+0{,}02)^{-16}]}{0{,}02}$

$x = \text{R}31\,888{,}51$

<u>Hoofstuk 5: Saamgestelde hoeke</u>

1 a $2\cos 2x = -1$

$\therefore cos2x = -\frac{1}{2}$

$2x = \pm 120° + k.360°; k \in Z$

$\therefore x = \pm 60° + k.180°; k \in Z$

b $sinx = 3cosx$

$\frac{sinx}{cosx} = 3$

$tanx = 3$

$\therefore x = 71{,}47° + k.180°; k \in Z$

c $sinx = cos3x$

$\therefore \cos(90° - x) = cos3x$

$90° - x = \pm 3x + k.360°$

$4x = 90° + k.360°$ of $2x = -90° + k.360°$

$x = 22{,}5° + k.90°$ $x = -45° + k.180°; k \in Z$

d $6 - 10cosx - 3(1 - cos^3x) = 0$

$\therefore 3cos^3x - 10cosx + 3 = 0$

$\therefore (3cosx - 1)(cosx - 3) = 0$

$\therefore cosx = \frac{1}{3}$ of $cosx = 3$ (geen oplossing nie)

$\therefore x = \pm 70{,}53° + k.360°; k\epsilon Z$

Vir $x \in [-360°; 360°]$ $x \in \{-289{,}47°; -70{,}53°; 289{,}47°\}$

e $2(sin^2x + cos^2x) - sinxcosx - 3cos^2x = 0$

$2sin^2x - sinxcosx - cos^2x = 0$

$(2sinx + cosx)(sinx - cosx) = 0$

$tanx = -\frac{1}{2}$ of $tanx = 1$

$x = -26{,}57° + k.180°$ of $x = 45° + k.180°; k \in Z$

f $3(sin^2x + cos^2x) - 8sinx + 16sinxcosx - 6cosx = 0$

$\therefore 3 - 6cosx - 8sinx + 16sinxcosx = 0$

$3(1 - 2cosx) - 8sinx(1 - 2xosx) = 0$

$(1 - 2cosx)(3 - 8sinx) = 0$

$cosx = \frac{1}{2}$ of $sinx = \frac{3}{8}$

$\therefore x = \pm 60° + k.360°$ of $x = 22{,}02° + k.360°$ of $x = 157{,}98° + k.360°; k \in Z$

2 a LK $= \cos x + \frac{\sin x}{\cos x} \times \sin x$

$= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos x}$

$= \frac{1}{\cos x}$

=RK

Nie geldig vir $x = 90^0 + k.180^0$ $nie; k \in Z$ nie

b LK = $\frac{\sin^2\theta - \cos\theta(1-\cos\theta)}{(1-\cos\theta)\sin\theta} = \frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta - \cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta} = \frac{1-\cos\theta}{(1-\cos\theta)\sin\theta} = \frac{1}{\sin\theta}$

=RK

Ongeldig vir $\theta = k.180^0; k \in Z$

c LK = $\frac{1-\cos^2 x}{\cos x} = \frac{\sin^2 x}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x}.\sin x = \tan x.\sin x$ = RK

Ongeldig vir $x = 90^0 + k.180^0; k \in Z$

d LK = $\frac{\sin x(\sin^2 x + \cos^2 x)}{\cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$ =RK

Ongeldig vir $x = 90^0 + k.180^0; k \in Z$

e
$$LK = \frac{1+\frac{\sin x}{\cos x}}{1-\frac{\sin x}{\cos x}} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x} \times \frac{\cos x}{\cos x - \sin x} \times \frac{\cos x + \sin x}{\cos x + \sin x}$$
$$= \frac{\cos^2 x + 2\sin x\cos x + \sin^2 x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{1 + 2\sin x\cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = RHS$$

Ongeldig vir $x = \pm 45^0 + k.180^0; k \in Z$

f $LK = \sin(45° + x).\sin(45° - x)$

$= (\sin 45°.\cos x + \sin x.cos45°) \times (\sin 45°.\cos x - \sin x.\cos 45°)$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)$

$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\right)^2$

$= \frac{1}{2}cos^2 x - \frac{1}{2}sin^2 x$

$= \frac{1}{2}(cos^2x - sin^2x)$

$= \frac{1}{2}\cos 2x$

$= RK$

g $\quad LK = \frac{\sin 2\theta - \cos\theta}{\sin\theta - \cos 2\theta}$

$= \frac{2\sin\theta.\cos\theta - \cos\theta}{\sin\theta - (1 - 2sin^2\theta)}$

$= \frac{\cos\theta(2\sin\theta - 1)}{2sin^2\theta + \sin\theta - 1}$

$= \frac{\cos\theta(2\sin\theta - 1)}{(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 1)}$

$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta + 1}$

$= RK$

h $\quad LK = \frac{\cos x - \cos 2x + 2}{3\sin x - \sin 2x}$

$= \frac{\cos x - (2cos^2x - 1) + 2}{3\sin x - 2\sin x.\cos x}$

$= \frac{-2cos^2x + \cos x + 3}{3\sin x - 2\sin x.\cos x}$

$= \frac{(-2\cos x + 3)(\cos x + 1)}{\sin x\,(3 - 2\cos x)}$

$= \frac{\cos x + 1}{\sin x}$

$= RK$

3 a $\quad \frac{\sin(180^0 - x)\tan(-x)}{\tan(180^0 + x)\cos(x - 90^0)} = \frac{\sin x(-\tan x)}{\tan x(\sin x)} = -1$

b $\quad \frac{\sin(180^0 + x)\tan(x - 360^0)}{\tan(360^0 - x)(-\cos 60^0)(\tan 45^0)} = \frac{\sin x.\tan x}{-\tan x(-0{,}5)(1)} = 2\sin x$

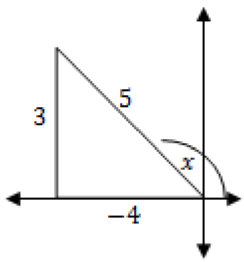
4 a $\cos 73^0 = \cos(90^0 - 17^0) = \sin 17^0 = k$

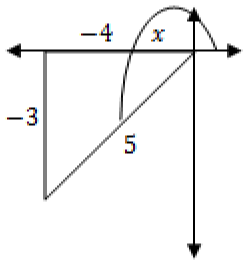
b $\cos(-163°) = cos163° = -cos17° = -\sqrt{1-k^2}$

c $tan197° = tan17° = \frac{k}{\sqrt{1-k^2}}$

d $cos326° = cos34° = cos2(17°) = 1 - 2sin^2 17° = 1 - 2k^2$

5 a $cosx = -\frac{4}{5}$





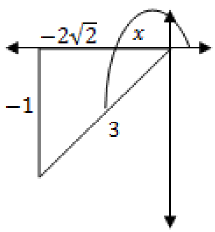
$$5\sin x + 3\tan x = 5\left(\frac{3}{5}\right) + 3\left(\frac{3}{-4}\right) \quad \text{of} \quad = 5\left(\frac{-3}{5}\right) + 3\left(\frac{-3}{-4}\right)$$

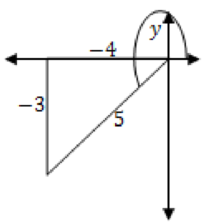
$$= 3 - \frac{9}{4} = \frac{3}{4} \quad \text{of} \quad = -5 + \frac{9}{4} = -\frac{3}{4}$$

b $\tan 2x = \dfrac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$

$$\therefore \tan 2x = \frac{2\left(\frac{3}{-4}\right)}{1 - \left(\frac{3}{-4}\right)^2} = -\frac{3}{2} \times \frac{16}{6} = -\frac{24}{7} \quad \text{of } \tan 2x = \frac{3}{2} \times \frac{16}{7} = \frac{24}{7}$$

6 a





$\cos(x-y) = \cos x.\cos y + \sin x.\sin y$

$= \frac{-2\sqrt{2}}{3} \times \frac{-4}{5} + \frac{-1}{3} \times \frac{-3}{5}$

$= \frac{8\sqrt{2}}{15} + \frac{1}{5}$

$= \frac{8\sqrt{2}+3}{15}$

b $\quad \cos 2x - \cos 2y$

$= 1 - 2sin^2x - (1 - 2sin^2y)$

$= 2sin^2y - 2sin^2x$

$= 2\left(\frac{-3}{5}\right)^2 - 2\left(\frac{-1}{3}\right)^2$

$= \frac{18}{25} - \frac{2}{9} = \frac{112}{225}$

7 a $\quad \cos 2(22{,}5°) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$

b $\quad \frac{1}{2} \times 2\sin 22{,}5°.\cos 22{,}5° = \frac{1}{2} \times \sin 2(22{,}5°)$

$= \frac{1}{2}\sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{4}$

c $\quad \sin 2(15°) = \sin 30° = \frac{1}{2}$

<u>Hoofstuk 6: Oplossing van probleme in drie dimensies</u>

1 a $\quad In\ \Delta ABE : \tan\alpha = \frac{2h}{BE} \qquad \therefore BE = \frac{2h}{\tan\alpha}$

b $\quad In\ \Delta CED: \ \tan(90° - \alpha) = \frac{h}{DE} \qquad \therefore DE = h\tan\alpha$

$In\ \Delta BDE$:

$BD^2 = BE^2 + ED^2 - 2(BE)(ED).\cos E$

$= (2h.\cot\alpha)^2 + (h.\tan\alpha)^2 - 2(2h.\cot\alpha)(h.\tan\alpha)\cos 120°$

$= 4h^2.cot^2\alpha + h^2tan^2\alpha - 4h^2(\cot\alpha.\tan\alpha)\left(-\frac{1}{2}\right)$

$= h^2(4cot^2\alpha + tan^2\alpha + 2)$

$= h^2\left(\frac{4}{tan^2\alpha} + tan^2\alpha + 2\right)$

$= \frac{h^2(tan^4\alpha + 2tan^2\alpha + 4)}{tan^2\alpha}$

$BD = \frac{h\sqrt{tan^4\alpha + 2tan^2\alpha + 4}}{\tan\alpha}$

c $\quad h = \frac{BD\tan\alpha}{\sqrt{tan^4\alpha + 2tan^2\alpha + 4}}$

$= \frac{509.\tan 42°}{\sqrt{tan^4 42° + 2tan^2 42° + 4}}$

$CD = 182{,}90 \text{ m}$

2 a $\quad C\hat{D}B = 180° - \theta - 30° = 150° - \theta$

b $\quad \tan\theta = \frac{p}{CB} \qquad \therefore p = CB.\tan\theta$

$\frac{CB}{\sin(150° - \theta)} = \frac{8}{\sin\theta}$

$CB = \frac{8.\sin(150° - \theta)}{\sin\theta}$

$= \frac{8.\sin(180° - (150° - \theta))}{\sin\theta}$

$= \frac{8.\sin(30° + \theta)}{\sin\theta}$

$p = \left(\frac{8.\sin(30° + \theta)}{\sin\theta}\right)\tan\theta = \frac{8.\sin(30° + \theta)}{\cos\theta}$

3 $\quad AD = 13\ (Pythagoras)$

$\hat{A} = 180° - (\alpha + \beta)$

$\therefore \frac{CD}{\sin[180° - (\alpha + \beta)]} = \frac{13}{\sin\alpha}$

$\therefore \frac{CD}{\sin(\alpha + \beta)} = \frac{13}{\sin\alpha}$

$\therefore CD = \frac{13\sin(\alpha + \beta)}{\sin\alpha}$

4 a $Oppervlakte\ \Delta ADC = \frac{1}{2}m.p\sin(180° - \theta)$

b $Oppervlakte\ \Delta BDC = \frac{1}{2}n.p\sin\theta$

$Oppervlakte\ \Delta ABC = Oppervlakte\ \Delta ADC + Oppervlakte\ \Delta BDC$

$= \frac{1}{2}mp\sin(180° - \theta) + \frac{1}{2}np\sin\theta$

$= \frac{1}{2}mp.\sin\theta + \frac{1}{2}np\,.\sin\theta$

$= \frac{1}{2}p(m+n)\sin\theta$

c $12{,}6 = \frac{1}{2}(8{,}1)(5{,}9)\sin\theta$

$\sin\theta = 0{,}527306968\ ...$

$\theta = 31{,}82° \quad OF \quad \theta = 180° - 31{,}82° = 148{,}18°$

5 a $\sin\theta = \frac{p}{BC}$

$\therefore BC = \frac{p}{\sin\theta}$

b $\hat{B}_1 = 180° - 2\alpha$

c $\frac{AC}{\sin\hat{B}_1} = \frac{BC}{\sin A}$

$\frac{AC}{\sin(180° - 2\alpha)} = \frac{\frac{p}{\sin\theta}}{\sin\alpha}$

$AC = \frac{p\sin(180° - 2\alpha)}{\sin\theta.\sin\alpha} = \frac{p.\sin 2\alpha}{\sin\theta.\sin\alpha}$

6 a $\hat{R} = 180° - 30° - (150° - \alpha) = \alpha$

$\frac{12}{\sin\hat{R}} = \frac{QR}{\sin(150° - \alpha)}$

$\frac{12}{\sin\alpha} = \frac{QR}{\sin(30° + \alpha)}$

$QR = \frac{12\sin(30° + \alpha)}{\sin\alpha}$

$$= \frac{12(\sin 30°.\cos \alpha + \cos 30°.\sin \alpha)}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{12\left(\frac{1}{2}.\cos \alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\sin \alpha\right)}{\sin \alpha}$$

$$= \frac{6(\cos \alpha + \sqrt{3}\sin \alpha)}{\sin \alpha}$$

b $\hat{P} = 180° - 90° - \alpha = 90° - \alpha$

$$\frac{QR}{\sin \hat{P}} = \frac{PQ}{\sin \alpha}$$

$$\frac{\frac{6(\cos \alpha + \sqrt{3}\sin \alpha)}{\sin \alpha}}{\sin(90° - \alpha)} = \frac{PQ}{\sin \alpha}$$

$$PQ \sin(90° - \alpha) = \frac{\sin \alpha.6(\cos \alpha + \sqrt{3}\sin \alpha)}{\sin \alpha}$$

$$PQ = \frac{6\cos \alpha}{\cos \alpha} + \frac{6\sqrt{3}\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$PQ = 6 + 6\sqrt{3}\tan \alpha$$

c $23 = 6 + 6\sqrt{3}\tan \alpha$

$$17 = 6\sqrt{3}\tan \alpha$$

$$tan\alpha = 1{,}64$$

$$\alpha = 58{,}56°$$

Hoofstuk 7: Polinome

1 a $27x^3 - 8 = (3x - 2)(9x^2 + 6x + 4)$

b $5x^3 + 40 = 5(x^3 + 8) = 5(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$

c $x^3 + 3x^2 + 2x + 6$

$= x^2(x + 3) + 2(x + 3)$

$= (x + 3)(x^2 + 2)$

d $4x^3 - x^2 - 16x + 4$

$= x^2(4x - 1) - 4(4x - 1)$

$= (4x - 1)(x^2 - 4)$

$= (4x - 1)(x - 2)(x + 2)$

e $4x^3 - 2x^2 + 10x - 5$

$= 2x^2(2x - 1) + 5(2x - 1)$

$= (2x - 1)(2x^2 + 5)$

f $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

$= (x^3 + 1) + (2x^2 + 2x)$

$= (x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x(x + 1)$

$= (x + 1)(x^2 + x + 1)$

g $x^3 - x^2 - 22x + 40$

$= (x - 2)(x^2 + x - 20)$

$= (x - 2)(x + 5)(x - 4)$

h $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

$= (x - 2)(x^2 + 4x + 3)$

$= (x - 2)(x + 3)(x + 1)$

i $3x^3 - 7x^2 + 4$

$= (x - 1)(3x^2 - 4x - 4)$

$= (x - 1)(3x + 2)(x - 2)$

j $x^3 - 19x + 30$

$= (x - 2)(x^2 + 2x - 15)$

$= (x - 2)(x + 5)(x - 3)$

k $x^3 - x^2 - x - 2$

$= (x - 2)(x^2 + x + 1)$

2 a $x(x^2 + 2x - 4) = 0$

$x = 0 \quad of \quad x = -1 \pm \sqrt{5}$

b $(x - 2)(x^2 - x - 3) = 0$

$x = 2 \quad of \quad x = \frac{1 \pm \sqrt{3}}{2}$

c $(2x^3 - 12x^2) - (x - 6) = 0$

$2x^2(x - 6) - (x - 6) = 0$

$(x - 6)(2x^2 - 1) = 0$

$x = 6 \quad of \quad x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$

d $(2x^3 - x^2) - (8x - 4) = 0$

$x^2(2x - 1) - 4(2x - 1) = 0$

$(x^2 - 4)(2x - 1) = 0$

$x = 2 \quad of\ x = -2 \quad of\ x = \frac{1}{2}$

e $(x - 1)(x^2 + 2x + 2) = 0$

$x = 1$

f $(x+2)(x^2-2x-8)=0$

$(x+2)(x-4)(x+2)=0$

$x=-2 \quad of \ x=4$

g $(x^3-20x)+(3x^2-60)=0$

$x(x^2-20)+3(x^2-20)=0$

$(x^2-20)(x+3)=0$

$x=\pm 2\sqrt{5} \quad of \ x=-3$

3 $f(3)=3^3-3^2-5(3)-3$

$=27-9-15-3=0$

$(x-3)$ is 'n faktor

$(x-3)(x^2+2x+1)=0$

$(x-3)(x+1)^2=0$

$x=3 \quad of \ x=-1$

4 $g\left(\frac{1}{2}\right)=4\left(\frac{1}{2}\right)^3-8\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+2$

$=\frac{1}{2}-2-\frac{1}{2}+2=0$

$(2x-1)(2x^2-3x-2)=0$

$(2x-1)(2x+1)(x-2)=0$

$x=\frac{1}{2} \quad of \ x=-\frac{1}{2} \quad of \ x=2$

Hoofstuk 8: Differensiaalrekene

1 a $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1-(x+h)^2-(1-x^2)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{1-(x^2+2xh+h^2)-(1-x^2)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-2xh-h^2}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-2x-h)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}(-2x-h)$

$= -2x$

b $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-3(x+h)^2-(-3x^2)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-3(x^2+2xh+h^2)-(-3x^2)}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{-6xh-3h^2}{h}$

$= \lim_{h\to 0} \frac{h(-6x-3h)}{h}$

$= \lim\limits_{h\to 0}(-6x-3h)$

$= -6x$

2 a $y = \sqrt{x} - \frac{1}{2x^2} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{-2}$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \times -2x^{-3}$

$= \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} + x^{-3}$

$= \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{x^3}$

2 b $D_x\left[\frac{2x^2-x-15}{x-3}\right]$

$= D_x\left[\frac{(2x+5)(x-3)}{x-3}\right]$

$= D_x[2x+5] = 2$

3 $f(x) = -2x^3 + 3x^2 + 32x + 15$

$f(-2) = -2(-2)^3 + 3(-2)^2 + 32(-2) + 15 = -21$

$f'(x) = -6x^2 + 6x + 32$

$f'(-2) = -6(-2)^2 + 6(-2) + 32 = -4$

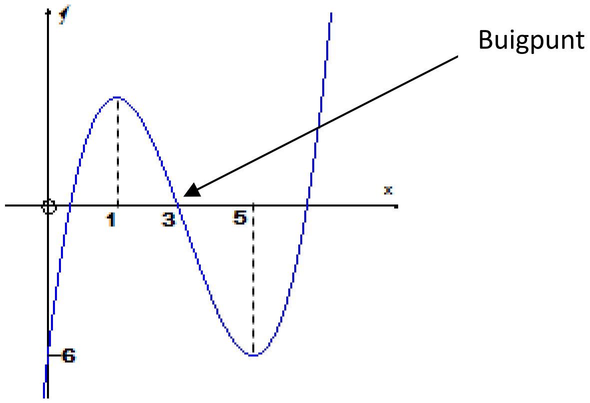
Vervang $(-2;-21)$ in $y = -4x + c$

$-21 = -4(-2) + c$

$c = -29$

$y = -4x - 29$

4



5 $(2;9)$ is 'n punt op die grafiek en 'n draaipunt

$\therefore f(2) = 9$ en $f'(2) = 0$

$f'(x) = 3ax^2 + 10x + 4$

$0 = 3a(2)^2 + 10(2) + 4$
$\therefore a = -2$

$9 = (-2)(2)^3 + 5(2)^2 + 4(2) + b$
$\therefore b = -3$

6 a Draaipunt waar $f'(x) = 0 \quad \therefore x = -2$ en $x = 5$

b Buigpunt is waar $f''(x) = 0$, dus waar grafiek van f' draai

c f sal afneem waar sy gradiënt f' negatief is $(f' < 0)$
$-2 < x < 5$

7 a Die grafiek bons by $x = 1$ en het 'n x-afsnit by $x = -1$
$\therefore f(x) = (x+1)(x-1)^2$
$f(x) = (x+1)(x^2 - 2x + 1) = x^3 - x^2 - x + 1$
$\therefore a = -1; b = -1; c = 1$

b B is 'n draaipunt waar $f'(x) = 0$
$3x^2 - 2x - 1 = 0$
$(3x+1)(x-1) = 0)$
By B $x = -\frac{1}{3}$
$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = \frac{32}{27}$

$B\left(-\frac{1}{3}; \frac{32}{27}\right)$

8 a As $s(t)$ afstand is, dan is $s'(t)$ spoed.
$s'(t) = 3t^2 - 4t + 3$

b Spoed is 'n minimum waar $s''(t) = 6t - 4 = 0$
$t = \frac{2}{3}$

c $6t - 4 = 8$

$t = 2s$

9 a Volume $= 2x^2h = 24$

$h = \frac{12}{x^2} = 12x^{-2}$

b $C(x) = 2x^2 \times 25 + 2x^2 \times 20 + 2 \times xh \times 20 + 2 \times 2xh \times 20$

$= 90x^2 + 120xh$

$= 90x^2 + 120x(12x^{-2})$

$= 90x^2 + 1440x^{-1}$

9 c $C'(x) = 180x - 1440x^{-2} = 0$

$180x - \frac{1440}{x^2} = 0$

$180x^3 - 1440 = 0$

$x^3 = 8$

$x = 2$

<u>Hoofstuk 9: Analitiese meetkunde</u>

1 a $m_{AB} = m_{CD}$

$\frac{1-(-4)}{-2-p} = \frac{0-2}{5-3}$

$\frac{5}{-2-p} = \frac{-2}{2} = -1$

$2 + p = 5$

$p = 3$

b $AB = \sqrt{(3-(-2))^2 + (-4-1)^2} = 5\sqrt{2}$

$CD = \sqrt{(5-3)^2 + (0-2)^2} = 2\sqrt{2}$

$AB : CD = 5\sqrt{2} : 2\sqrt{2} = 5 : 2$

c $m_{NB} = m_{CD}$

$\frac{y+4}{x-3} = -1 \qquad \therefore y = -x - 1 \quad \ldots (1)$

$m_{ND} = m_{BC}$

$\frac{y-2}{x-3} = 2 \qquad \therefore y = 2x - 4 \quad \ldots (2)$

(1)-(2): $0 = 3x - 3$

$x = 1 \quad y = -2$

$N(1; -2)$

d B en D het dieselfde x-koördinaat; dus is dit 'n vertikale lyn met vergelyking $x = 3$.

e Hellingshoek van 'n vertikale lyn is $90°$.

f Oppervlakte van parallelogram = basis x loodregte hoogte

$Oppervlakte\ van\ NBCD = CD \times loodregte\ hoogte$

$= 2\sqrt{2} \times 6 = 12\sqrt{2}$

g $m_{AR} = m_{AC}$

$\frac{q-1}{-2+1} = \frac{1-0}{-2-5}$

$\frac{q-1}{-1} = \frac{1}{-7}$

$\therefore q = \frac{8}{7}$

2 a Vervang $x = 1$ en $y = -3$ in LK. As LK = 0, dan lê die punt $N(1; -3)$ op die sirkel.

$LK = x^2 + 4x + y^2 + 2y - 8$

$= (1)^2 + 4(1) + (-3)^2 + 2(-3) - 8 = 0$

$\therefore N$ lê op die sirkel

b Bepaal eers die middelpunt van die sirkel:

$x^2 + 4x + 4 + y^2 + 2y + 1 = 8 + 4 + 1$

$(x + 2)^2 + (y + 1)^2 = 13$

Middelpunt van sirkel is $M(-2; -1)$

$m_{MN} = \frac{-1+3}{-2-1} = -\frac{2}{3}$

MN$\perp$PN (radius$\perp$raaklyn)

$\therefore m_{PN} = \frac{3}{2}$

Vervang $N(1; -3)$: $y = \frac{3}{2}x + c$

$-3 = \frac{3}{2}(1) + c \qquad \therefore c = -\frac{9}{2}$

$y = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$

c $\theta = tan^{-1}\left(\frac{3}{2}\right) = 56{,}3°$

d x –afsnit waar $y = 0$:

$0 = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ $\therefore x = 3$

e y –afsnitte is waar $x = 0$:

$(0)^2 + 4(0) + y^2 + 2y - 8 = 0$

$\therefore y^2 + 2y - 8 = 0$

$(y + 4)(y - 2) = 0$

Die punte is $(0; -4)$ en $(0; 2)$.

3 a $m_{RO} = \frac{-12}{-6} = 2$

b PS $\perp$ RN (RN is hoogtelyn van Δ)

$m_{PS} \times m_{RN} = -1$

$\therefore m_{PS} = -\frac{1}{2}$

c $P(0; 6)$ (y –afsnit van PR)

$\therefore y = -\frac{1}{2}x + 6$

d $tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 26{,}57°$

Helling van PS $= 180° - 26{,}57° = 153{,}43°$

e Vervang $N(2n; 3\frac{3}{5} + n)$ in vergelyking van PS

$3\frac{3}{5} + n = -\frac{1}{2}(2n) + 6$

$3\frac{3}{5} + n = -n + 6$

$2n = 2\frac{2}{5} = \frac{12}{5}$

$n = \frac{6}{5}$

f Bepaal vergelyking van SM. SM is die mediaan; dus is M die middelpunt van PR.

$M\left(\frac{-6+0}{2};\frac{-12+6}{2}\right) = (-3;-3)$

$m_{MS} = 1$, dus vergelyking van SM: $y =$

Los vergelykings van SM en PS gelyktydig op om koördinate van S te bereken

$x = -\frac{1}{2}x + 6 \qquad \therefore x = 4; y = 4$

$S(4;4)$

4 a $x^2 + 4x + y^2 - 2y = 4$

$x^2 + 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 = 4 + 4 + 1$

$(x+2)^2 + (y-1)^2 = 9$

Middelpunt $M(-2;1)$ radius$= 3$

b Vervang $N(p;1)$ in vergelyking van sirkel.

$p^2 + 1^2 + 4(p) - 2(1) - 4 = 0$

$p^2 + 4p - 5 = 0$

$(p+5)(p-1) = 0$

$\therefore p = 1$ omdat $p > 0$

4 c Radius deur N is horisontaal.

Dus sal die raaklyn vertikaal wees.

Vergelyking van raaklyn: $x = 1$

5 a $m_{AD} = \frac{3-0}{-3-0} = -1$

AD gaan deur oorsprong: Dus, vergelyking is $y = -x$

b $BD^2 = DC^2$

$(x-2)^2 + (y-3)^2 = (x-6)^2 + (y+1)^2$

Vervang $y = -x$

$(x-2)^2 + (-x-3)^2 = (x-6)^2 + (-x+1)^2$

$x^2 - 4x + 4 + x^2 + 6x + 9 = x^2 - 12x + 36 + x^2 - 2x + 1$

$16x = 24$

$x = \frac{3}{2} \qquad \therefore y = -\frac{3}{2}$

c $m_{BD} = \frac{3-(-\frac{3}{2})}{2-\frac{3}{2}} = 9$

Vervang $B(2; 3)$ in $y = 9x + c$

$3 = 9(2) + c \qquad \therefore c = -15$

$y = 9x - 15$

d Helling van BD= $tan^{-1}(9) = 83{,}7°$

$m_{BC} = \frac{3-(-1)}{2-6} = -1$

Helling van BC= $135°$

$\therefore \theta = 135° - 83{,}7° = 51{,}3°$

e $BD = \sqrt{\left(2-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(3+\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{82}}{2}$

$BC = \sqrt{(3+1)^2 + (2-6)^2} = 4\sqrt{2}$

$Oppervlakte\ van\ \Delta BDC = \frac{1}{2} BD \times BC \times sin\theta$

$= \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{82}}{2} \times 4\sqrt{2} \times sin 51{,}3°$

$= 10\ vierkante\ eenhede$

6 a Bepaal eers vergelyking van AC

$m_{AC} = \frac{3-(-3)}{2-5} = -2$

Vervang $(2; 3)$: $3 = -2(2) + c \qquad \therefore y = -2x + 7$

$x - afsnit(y = 0): x = \frac{7}{2}$

$D\left(\frac{7}{2}; 0\right)$

b $BC^2 = AC^2$

$(p-5)^2 + (0+3)^2 = (5-2)^2 + (-3-3)^2$

$p^2 - 10p + 25 = 9 + 36$

$p^2 - 10p - 20 = 0$

$p = \frac{10 \pm \sqrt{180}}{2} = 5 \pm 3\sqrt{5}$

$p = 5 - 3\sqrt{5}$

c $m_{AC} = -2$

$Helling\ van\ AC = 180° - tan^{-1}(2) = 116{,}6°$

d $B(-1;0)$

$m_{AB} = \frac{3-0}{2+1} = 1$

Helling van $AB = 45°$

$\hat{A} = helling\ van\ AC - helling\ van\ AB$

$= 116{,}6° - 45°$

$= 71{,}6°$

7 Die lyn sal 'n raaklyn wees as dit die sirkel in net een punt sny.

Vervang $y = x + 1$ in vergelyking van sirkel en los op vir x.

Daar behoort net een oplossing te wees.

$x^2 + (x+1)^2 + 6(x+1) - 7 = 0$

$x^2 + x^2 + 2x + 1 + 6x + 6 - 7 = 0$

$2x^2 + 8x = 0$

$x = 0$ of $x = -4$

Die lyn is NIE 'n raaklyn nie.

8 a $y = 2$ by C. Vervang in $3x + 4y + 7 = 0$

$3x + 4(2) + 7 = 0$

$3x = -15$

$x = -15$

$\therefore C(-5;2)$ en die radius is 5

$(x+5)^2 + (y-2)^2 = 25$

b Lengte van $DE = 10$

c $m_{PE} = \frac{2+1}{0+1} = 3$

$m_{middelloodlyn} = -\frac{1}{3}$

Middelpunt van PE$= \left(\frac{0-1}{2}; \frac{2-1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\right)$

Vervang middelpunt in $y = -\frac{1}{3}x + c$

$\frac{1}{2} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right) + c$

$c = \frac{1}{3}$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

d $3x + 4\left(-\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}\right) + 7 = 0$

$3x - \frac{4}{3}x + \frac{4}{3} + 7 = 0$

$\frac{5}{3}x = -\frac{25}{3}$

$x = -5$

$y = -\frac{1}{3}(-5) + \frac{1}{3} = 2$

Die lyne sny by $(-5; 2)$.

9 a Laat die koördinate van S $(x; 0)$ wees.

ST⊥SR

$m_{ST} \times m_{SR} = \frac{4}{-x} \times \frac{4}{x-4} = -1$

$x(x-4) = 16$

$x^2 - 4x - 16 = 0$

$x = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4(-16)}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{5}$

Maar S is op positiewe x –as; dus $S\left(2 + 2\sqrt{5}; 0\right)$

b $m_{ST} = \frac{4-0}{0-\left(2+2\sqrt{5}\right)} = -0{,}62$

c Helling van TS$= 180° - tan^{-1}(0{,}62) = 148{,}20°$

$m_{TR} = \frac{4+4}{0-4} = -2$

Helling van TR $= 180° - tan^{-1}(2) = 116{,}57°$

$R\hat{T}S = 148{,}20° - 116{,}57° = 31{,}63°$

10 a $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 3 = 0$
$x^2 - 4x + y^2 + 6y = -3$
$x^2 - 4x + 4 + y^2 + 6y + 9 = -3 + 4 + 9$
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 10$

Middelpunt is $(2; -3)$

$m_{radius} = \frac{-2+3}{5-2} = \frac{1}{3}$

$m_{raaklyn} = -3$

Vervang $(5; -2)$ in $y = -3x + c$
$-2 = -3(5) + c$
$c = 13$
$\therefore y = -3x + 13$

b $\sqrt{(x-2)^2 + (y+3)^2} = \sqrt{20}$
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 20$

Vervang $y = -3x + 13$ in vergelyking hierbo:
$(x-2)^2 + (-3x + 13 + 3)^2 = 20$
$(x-2)^2 + (-3x + 16)^2 = 20$
$x^2 - 4x + 4 + 9x^2 - 96x + 256 = 20$
$10x^2 - 100x + 240 = 0$
$x^2 - 10x + 24 = 0$
$(x-6)(x-4) = 0$

$x = 6$ of $x = 4$

$y = -3(6) + 13 = -5$ of $y = -3(4) + 13 = 1$

$T(6; -5)$ of $T(4; 1)$

Hoofstuk 10: Euklidiese meetkunde

1 a $\hat{B}_1 = \hat{M}_1$ raaklyn koord
$\hat{B}_1 = \hat{C}$
$\therefore \hat{M}_1 = \hat{C}$
$\therefore MN || CA$ ooreenkomstige ∠e

b $\hat{K}_1 = \hat{M}_2$ verwisselende ∠e
$\hat{K}_1 = \hat{N}_2$ raaklyn koord
$\therefore \Delta KMN$ is gelykbenig

c $\widehat{K}_4 = \widehat{N}_2$ verwisselende ∠e

$\widehat{N}_2 = \widehat{B}_3$ ∠e in dieselfde segment

$\hat{A}_3 = \widehat{B}_3$ ∠e in dieselfde segment

$\therefore \widehat{K}_4 = \hat{A}_3$

$\therefore NK||AP$ verwisselende ∠e =

$\therefore \frac{BN}{NA} = \frac{BK}{KP}$ lyn || aan een sy van Δ

Maar $\frac{BN}{NA} = \frac{BM}{MC}$ lyn || aan een sy van Δ

$\therefore \frac{BK}{KP} = \frac{BM}{MC}$

d $\hat{A}_3 = \widehat{B}_3$ ∠e in dieselfde segment

$\widehat{B}_3 = \widehat{B}_2$ gelyke koorde onderspan gelyke ∠e

$\therefore \hat{A}_3 = \widehat{B}_2$

$\therefore DA$ is 'n raaklyn aan die sirkel deur A, B en K

2 a $\hat{C}_3 = C\hat{P}R$ ∠e teenoor gelyke sye

$\hat{C}_3 + \hat{C}_2 = \hat{A}_1 + \widehat{B}$ buite∠ van Δ

$\hat{C}_2 = \widehat{B}$ raaklyn koord

$\therefore \hat{C}_3 = \hat{A}_1$

$\therefore \hat{A}_1 = C\hat{P}R$ albei $= \hat{C}_3$

ACPR is 'n koordevierhoek (buite∠ van vierhoek)

b In ΔCBA en ΔRPA:

$\widehat{P}_2 = \hat{C}_2$ ∠e in dieselfde segment

$= \widehat{B}$ bewys in 2 a

$\therefore \widehat{B} = \widehat{P}_2$

$\hat{C}_1 = A\hat{R}P$ buite∠ van koordevierhoek

$\hat{A}_1 = \hat{A}_3$ 3de ∠ van Δ

$\therefore \Delta CBA|||\Delta RPA$ ∠∠∠

c $\frac{RP}{CB} = \frac{RA}{CA}$ van 2 b

$RP = \frac{CB.RA}{CA}$, maar $RP = RC$

$\therefore RC = \frac{CB.RA}{CA}$

d In ΔRAC en ΔRCB:

$\hat{C}_2 = \hat{B}$ raaklyn koord

$\hat{R}_1$ is gemeen

$R\hat{C}B = R\hat{A}C$ 3de hoek

$\therefore \Delta RAC ||| \Delta RCB$ ∠∠∠

$\frac{AC}{CB} = \frac{RC}{RB}$ ∠e |||

$RB.AC = RC.CB$

e $\frac{CB}{RP} = \frac{CA}{RA}$ van 2 b

$\frac{CB}{RC} = \frac{CA}{RA}$ RC=RP

$AC = \frac{CB.RA}{RC}$ ...(i)

Van 2 d $AC = \frac{RC.CB}{RB}$

$\therefore \frac{CB.RA}{RC} = \frac{RC.CB}{RB}$

$\therefore RC^2 = RA.RB$

3 a $\hat{B}_2 = \hat{A}_3 = x$ ∠e teenoor gelyke sye

$\hat{M}_1 = 180° - 2x$ som ∠e van Δ

$\therefore \hat{D} = 2x$

b i $\hat{C} = \frac{\hat{M}_1}{2}$ ∠ by middelpunt =2x∠sirkel

$= 90° - x$

$C\hat{B}D = 180° - (90° - x + 2x)$ som ∠e van Δ

$= 90° - x$

$\hat{N}_1 = \hat{C} = 90° - x$ buite∠ van koordevierhoek

$\therefore C\hat{B}D = \hat{N}_1$

$\therefore CB || AN$ ooreenkomstige ∠e

b ii $C\hat{B}A = \hat{D} = 2x$ raaklyn koord

$C\hat{B}A = \hat{A}_2$ verwisselende ∠e

$\hat{A}_2 = \hat{D}$

∴AB is 'n raaklyn (∠ tussen lyn & koord = ∠ onderspan koord)

4 a $\hat{B}_3 = \hat{E}_1 = x$ ∠e in dieselfde segment

$\hat{B}_3 = \hat{D}_2 = x$ ∠e teenoor = sye

$B\hat{O}D = 180° - 2x$ som ∠e van Δ

$\hat{A} = 90° - x$ ∠ by middelpunt = 2 x ∠ sirkel

b i $\hat{C}_1 = 90° - x$ buite∠ van koordevierhoek

$\hat{F}_2 = 180° - (x + 90° - x)$ som ∠e van Δ

$= 90°$

In ΔBEF en ΔCEF:

$\hat{F}_1 = \hat{F}_2 = 90°$ aangrensende ∠e reguitlyn

BF = FC

FE is gemeen

$\Delta BEF \equiv \Delta CEF$ s∠s

BE = EC (≡)

b ii $\hat{B}_1 = 90° - x$ som ∠e van Δ

$\therefore \hat{B}_1 = \hat{A}$

∴ BE is nie 'n raaklyn nie $\left(\hat{B}_1 + \hat{B}_2 \neq \hat{A}\right)$

5 a P is middelpunt van AC mediane saamlopend

AB||PM middelpuntstelling

In ΔBNC:

$\frac{ND}{NC} = \frac{BM}{BC} = \frac{AP}{AC}$ lyn || 1 sy van Δ

$= \frac{BM}{2BM} = \frac{1}{2}$

b In ΔAMP:

$\frac{AO}{OM} = \frac{2OM}{OM}$

$\frac{RP}{PC} = \frac{RP}{AP}$ BP is 'n mediaan

$= \frac{OM}{AM}$ lyn || 1 sy van Δ

$= \frac{OM}{3OM}$

$= \frac{1}{3}$

6 a $\hat{C}_2 = 90°$ ∠ in half ⊙

$\hat{M}_2 = 90°$ AM⊥NM

$\therefore NQ||CD$ ooreenkomstige ∠e =

b $\hat{C}_1 = \hat{N}$ || lyne, ooreenkomstige ∠e

$\hat{A}_2 = \hat{C}_1$ raaklyn koord

$= \hat{N}$

∴ ANCQ is ’n koordevierhoek ∠e onderspan deur dieselfde lynsegment

c i In ΔPCD en ΔPAC:

$\hat{C}_1 = \hat{A}_2$ raaklyn koord

$\hat{P}$ is gemeen

$\hat{D}_1 = A\hat{C}P$ 3de ∠

$\therefore \Delta PCD\ |||\ \Delta PAC$ ∠∠∠

c ii $PC^2 = AP.DP$

d In ΔNBC en ΔBCD:

$\hat{N} = \hat{A}_2$ ∠e in dieselfde segment

$= \hat{B}_2$ ∠e in dieselfde segment

$\hat{C}_4 = \hat{A}_1$ tan koord

$= \hat{D}_2$ ∠e in dieselfde segment

$\hat{B}_1 = B\hat{C}D$ 3de ∠

$\therefore \Delta NBC \equiv \Delta BCD$ ∠∠∠

$\therefore \frac{BC}{NB} = \frac{CD}{NB}$

$BC^2 = CD.NB$

e $1 - \frac{BM^2}{BC^2} = \frac{BC^2 - BM^2}{BC^2}$

$= \frac{MC^2}{BC^2}$ Pyth.

$= \frac{PC^2}{BC^2}$

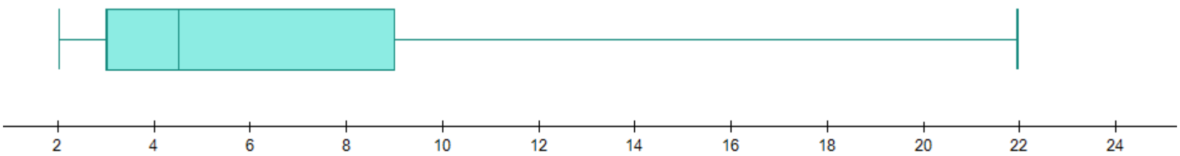
$= \frac{AP.DP}{CD.NB}$

Hoofstuk 11: Statistiek: regressie en korrelasie

1 a

	Laer Q	Mediaan	Hoër Q
Wedstryde gespeel	3	5	6
Wedstryde gewen	1	7	3
Doele teen	3	4,5	9

b

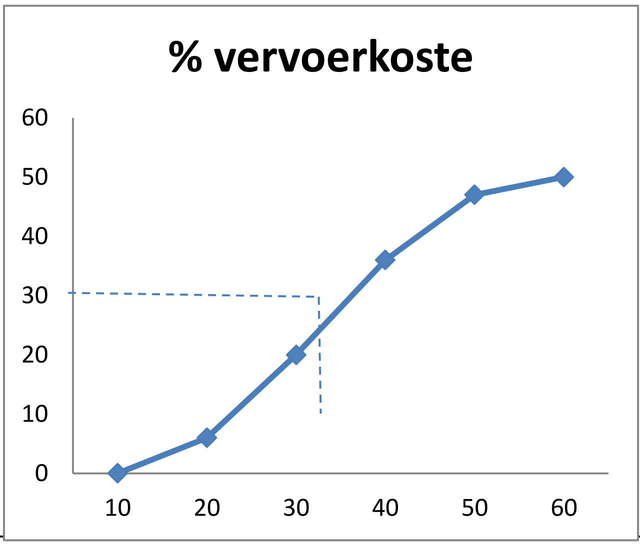


Positief skeef (skeef na regs)

c $\frac{65}{14} = 4{,}64$

d Standaardafwyking $= 1{,}72$

2 a



b Mediaan $= \pm 32\%$

c

Klasmiddelpunt	Frekwensie	Frekwensie x Middelpunt
15	6	90
25	14	350
35	16	560
45	11	495
55	3	165
TOTAAL	50	1 660

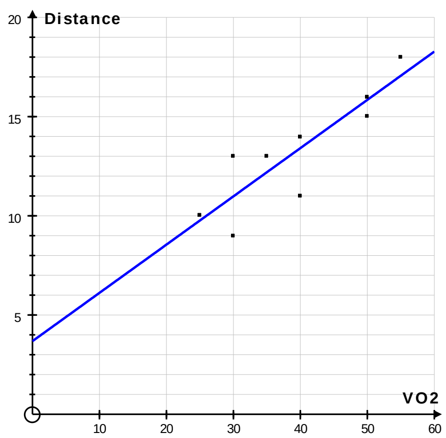
Geskatte gemiddelde $\bar{x} = \frac{1\,660}{50} = 33{,}2\%$

d

Klasmiddelpunt x_i	Frekwensie f	$\bar{x} - x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$f(\bar{x} - x_i)^2$
15	6	-18,2	331,24	1 987,44
25	14	-8,2	67,24	941,36
35	16	1,8	3,24	51,84
45	11	11,8	139,24	1 531,64
55	3	21,8	475,24	1 425,72
TOTAAL	50			5 938

Standaardafwyking$= \sqrt{\frac{5938}{50}} = 10{,}90$

3 a & c



b $y = 0{,}2432x + 3{,}6834$

d Vervang $y = 19$, dan is $x = 62{,}98$ (VO²)

e $r = 0{,}8985 \ldots$

Sterk positiewe korrelasie

4

$Getal$	$(Getal - gemiddelde)^2$
4	36
8	4
10	0
x	$(x - 10)^2$
y	$(y - 10)^2$

Gemiddelde$= 10$

$\therefore \frac{4+8+10+x+y}{5} = 10$

wat vereenvoudig tot: $x + y = 28 \ldots . (1)$

Standaardafwyking = 4

$\therefore \sqrt{\frac{36+4+0+(x-10)^2+(y-10)^2}{5}} = 4$

wat vereenvoudig tot: $(x - 10)^2 + (y - 10)^2 = 40 \ldots (2)$

Vervang $y = 28 - x$ van (1) in (2):

$x^2 - 28x + 192 = 0$

$(x - 12)(x - 16) = 0$

$x = 12$ of $x = 16$

$y = 16$ of $y = 12$

5 Die standaardafwyking sal 7,5 bly.

As al die getalle 2 groter is, sal die gemiddelde ook 2 groter wees.

Die verskil tussen elke getal en die gemiddelde sal dus dieselfde bly en die standaardafwyking onveranderd laat.

Hoofstuk 12: Waarskynlikheid

1 7 plekke wat met 7 syfers gevul moet word sonder herhaling (as 0, 7 en 4 nie weer gebruik word nie)

$\therefore 7! = 5040$

2 7 plekke moet gevul word – 10 syfers is beskikbaar vir elke plek

$\therefore 10^7 = 10\ 000\ 000$

3 P(koningin van ruitens)= $\frac{1}{52}$

4 a $11!$

b $\frac{11!}{2!2!2!2!2!} = 1\ 247\ 400$ (5 letters word herhaal)

5 a Beskou die 4 Engelse boeke as 'n eenheid. Die aantal rangskikkings vir die Engelse boeke is 4!=24

Totale aantal rangskikkings= $4! \times 6! = 17\ 280$

b $4! \times 3! \times 2! \times 3! = 1\ 728$

c $9! = 362\ 880$

6 $12 \times 11 = 132$

7 Bereken eers die totale aantal woorde: $\frac{11!}{2!2!2!} = 4\ 989\ 600$

Bereken nou hoeveel van hierdie woorde met dieselfde letter sal begin en eindig. Dit kan met D, I of G begin en eindig.

$\therefore \frac{9!}{2!2!} = 90720$

P(begin en eindig nie met dieselfde letter nie)= $1 - \frac{90\ 720}{4\ 989\ 600} = \frac{54}{55}$

8 a $\frac{10!\times 2}{2!2!2!} = 907\ 200$ b $\frac{10!}{2!2!2!} = 453\ 600$